

ROMUALDO WANDRESEN

MÉTODOS ITERATIVOS PARA A SOLUÇÃO
DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES NORMAIS

Dissertação apresentada ao Curso
de Pós-Graduação em Ciências Geoo
désicas para a obtenção do Grau
de Mestre em Ciências pela Uniu
versidade Federal do Paraná.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

1 9 8 0

MÉTODOS ITERATIVOS PARA A SOLUÇÃO
DE SISTEMA DE EQUAÇÕES NORMAIS

DISSERTAÇÃO

Apresentada ao Curso de Pós-Graduação em
Ciências Geodésicas para obtenção do Grau
de Mestre em Ciências pela Universidade
Federal do Paraná

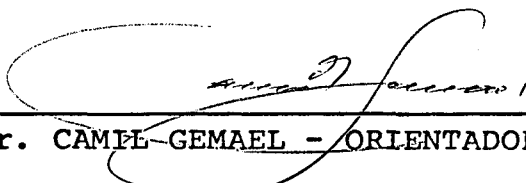
por

ROMUALDO WANDRESEN, Lic. em Matemática

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

1 9 8 0

BANCA EXAMINADORA:


Dr. CAMIL GEMAEL - ORIENTADOR


M.Sc. CELSO CARNIERI - CO-ORIENTADOR


Dr. NELSON DE LUCA

À minha esposa Maria Otilia
e meu filho Rafael Romualdo.

AGRADECIMENTOS

Expressamos os nossos melhores agradecimentos às pessoas e instituições abaixo citadas, por suas contribuições relevantes em várias fases do desenvolvimento deste trabalho:

Camil Gemaël, Dr. ;

Celso Carnieri, M. Sc. ;

CNPq ;

Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná;

Danusia Wasylyk Santin;

Escola de Oficiais Especialistas da Aeronáutica;

François Albert Rosier, M. Sc.;

Hélio Hipólito Simiema, Lic..Mat.;

José Bittencourt de Andrade, Ph.D.;

Quintino Dalmolin, M.Sc.;

Roseli G.de Alencar Lima, Bel.Bibliotecon. ;

e aos que nos auxiliaram indiretamente.

S I N O P S E

Este trabalho consiste em desenvolver e aplicar alguns métodos iterativos à solução de sistemas de equações normais, oriundas da aplicação do método dos mínimos quadrados; estudar os princípios para o estabelecimento de métodos iterativos; estabelecer condições de convergência dos métodos iterativos para sistemas de equações lineares; e estudar, ainda, por um processo iterativo, o cálculo da inversa de matrizes simétricas e definidas positivas.

Ele contém testes computacionais comparativos entre os métodos iterativos de Jacobi, Gauss-Seidel, S.O.R. (Successive Over Relaxation) e Gradientes Conjugados para um mesmo sistema de equações normais.

S Y N O P S I S

This work shows the development and application of some iterative methods to solve systems of normal equations resulting from the application of least square algorithm. The principles for the choice of the methods to be used and the condition for convergence are studied. It is also studied the ways to find the inverse of a symmetric and positive definite matrix.

Computational tests, for the comparison between different iterative methods like Jacobi, Gauss-Seidel, Successive Over Relaxation and Conjugate Gradient were devised for the same system of normal equations.

SUMÁRIO

	Página
Título	ii
Dedicatória	iii
Agradecimentos	iv
Sinopse	v
Synopsis	vi
Sumário	vii
Simbologia utilizada no Cap.II-Preliminares	xiii
<u>CAPÍTULO I</u>	
INTRODUÇÃO	1
<u>CAPÍTULO II</u>	
PRELIMINARES	
2.1 Conceito de limite em álgebra linear	4
2.1.1 Limites de vetores	4
2.2 Norma de vetores	5
2.2.1 Conceituação	5
2.2.2 Tipos de normas vetoriais	6
2.2.3 Verificação das condições de norma de um <u>ve</u> tor para as <u>ℓ</u> , <u>m</u> e <u>k</u> normas	7
2.2.3.1 Verificação da condição (2.2.3) para a:	
2.2.3.1-a m-norma	7
2.2.3.1-b ℓ-norma	8
2.2.3.1-c k-norma	8

	Página
2.3 Valor absoluto e norma de uma matriz	9
2.3.1 Valor absoluto	9
2.3.2 Norma	10
2.3.3 Norma canônica de uma matriz	12
2.3.4 Tipos de normas matriciais	12
2.3.5 Verificação das condições de norma de uma matriz para as normas $\ A\ _m$, $\ A\ _\ell$, $\ A\ _k$..	13
2.3.5.1 Verificação da condição (2.3.10) para a:	
2.3.5.1-a m-norma	14
2.3.5.1-b ℓ -norma	14
2.3.5.1-c k-norma	14
2.3.5.2 Verificação da condição (2.3.11):	
2.3.5.2-a m-norma	16
2.3.5.2-b ℓ -norma	16
2.3.5.2-c k-norma	17
2.3.6 Caso particular das normas m, ℓ , k para a matriz identidade	19
2.4 Limite de uma seqüência de matrizes	19
2.4.1 Propriedades	22
2.5 Séries matriciais	23
2.5.1 Introdução	23
2.5.2 Condição necessária de convergência de uma série matricial	24
2.5.3 Séries de potências	27
2.5.4 Séries de potências matriciais	28
2.6 Forma quadrática	34

CAPÍTULO III

PRINCÍPIOS PARA O ESTABELECIMENTO DE MÉTODOS ITERATIVOS

	Página
3.1	Análise numérica 44
3.2	Recursividade e iteração 54
3.3	Princípio geral para o estabelecimento de métodos iterativos para resolver sistemas lineares 60
3.4	Convergência 64

CAPÍTULO IV

MÉTODOS ITERATIVOS PARA A SOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

4.1	Método de Jacobi 75
4.1.1	Introdução 75
4.1.2	Dedução do algoritmo que caracteriza o método 79
4.2	Método de Gauss-Seidel 83
4.3	Método S.O.R. (Successive-Over-Relaxation) (Sobre-Relaxação) 88
4.4	Método iterativo dos gradientes conjugados .. 90
4.4.1	Introdução 90
4.4.2	Método básico de relaxação 92
4.4.3	Interpretação geométrica 99
4.4.4	Método dos gradientes conjugados 100
4.4.5	Algoritmo simplificado do método dos gradientes conjugados 109
4.4.6	Método dos gradientes conjugados, aplicado diretamente às equações de observação, sem explicitar a formação das equações normais..... 114
4.4.6.1	Introdução 114
4.4.6.2	Procedimento 115
4.4.6.3	Dedução do algoritmo do método dos gradientes

	Página
conjugados usando diretamente as equações de observação	120
4.4.7 Cálculo da inversa da matriz normal N , utilizando o método dos gradientes conjugados	127
4.5 Convergência de processos iterativos para sistemas de equações lineares	132
4.5.1 Condições suficientes de convergência	133
4.5.2 Estimativa do erro nas aproximações dos processos iterativos	140
4.5.3 Condições suficientes para a convergência do processo iterativo de Gauss-Seidel	147
4.5.3.1 Primeira condição suficiente	147
4.5.3.2 Estimativa do erro das aproximações sucessivas no método de Gauss-Seidel utilizando a m -norma	152
4.5.3.3 Segunda condição suficiente	156
4.5.3.4 Estimativa do erro das aproximações sucessivas utilizando a ℓ -norma	161
4.5.3.5 Terceira condição suficiente	163
4.5.3.6 Convergência do processo iterativo de Gauss-Seidel para um sistema normal	164
4.6 Adequação de escala	164

CAPÍTULO V

EXPERIÊNCIAS

5.1	Resolução do sistema de equações normais dado em 29 de dimensão $N=12$ k =número de iterações CPU(s) Precisão dupla x =vetor solução. Precisão exigida para a k -ésima iteração= 10^{-7}	171
5.2	Resolução do sistema de equações normais dado em 30	173

		Página
5.3	Aplicação do método dos gradientes conjugados partindo das equações de condição dadas em [31] para o cálculo do vetor das correções	175
5.4	Aplicação dos métodos gradientes conjugados para o ajustamento a partir das equações de observação. Aplicação a um sistema de dimensão 67 x 24	176
5.5	Aplicação do Programa 13	177

CAPÍTULO VI

CONCLUSÃO	178
-----------------	-----

APÊNDICE

PROGRAMAS (FORTRAN)	183
Programa 1	184
Programa 2	185
Programa 3	186
Programa 4	188
Programa 5	189
Programa 6	191
Programa 7	193
Programa 8	195
Programa 9	197
Programa 10	200
Programa 11	203
Programa 12	205

	Página
Programa 13	208
NOTAS DE REFERÊNCIA	210
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	213

SIMBOLOGIA UTILIZADA NO CAPÍTULO II - PRELIMINARES

SÍMBOLO	SIGNIFICADO
\forall	Para qualquer ou para todo
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais
ϵ	Pertence, ou número infinitamente pequeno conforme o sentido
\lim	Limite
$\max_i x_i $	Máximo valor de $ x_i $ com índice i
Σ	Somatório
0	Número real zero, ou matriz conforme o sentido
∞	Infinito
k	Número real
$\det A$	Determinante da matriz quadrada A
$A = (a_{ij})$ ou $A = a_{ij} $	Matriz A
i	Unidade imaginária $i = \sqrt{-1}$

CAPÍTULO I

I N T R O D U Ç Ã O

Os diferentes métodos de resolução de sistemas de equações lineares foram, e continuam sendo, objeto dos mais importantes na aplicação a problemas técnicos e científicos.

Em particular, no ramo das Ciências Geodésicas é muito comum o geodesta se defrontar com um sistema de equações lineares, oriundo de um AJUSTAMENTO DE OBSERVAÇÕES.

As dificuldades aumentam principalmente quando, ao se aplicar um determinado método de Ajustamento de Observações, o grande número de equações de observação, no método paramétrico, ou de equações de condição, no método dos correlatos, leva a um sistema de equações normais de porte elevado. Os sistemas de equações normais que são caracterizados pela propriedade de apresentar os elementos simétricos em relação à diagonal principal iguais, são obtidos como se sabe, da aplicação do "MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS".

Dependendo dos recursos computacionais que o usuário tem em mãos; da dimensão do sistema de equa-

ções normais, a capacidade de memória do computador poderá ser insuficiente para resolvê-lo com a aplicação de algum método direto.

Os métodos diretos, a menos de erros de arredondamento, conduzem à solução exata do sistema, após um número finito de operações, número esse que pode ser conhecido a priori.

Com o grande desenvolvimento e aprimoramento dos computadores digitais, o problema de " capacidade de memória " dos computadores nas Universidades Brasileiras tende a melhorar a longo prazo. Como é o caso da Universidade Federal do Paraná, onde em 1979 foi implantado o novo sistema computacional DEC-SYSTEM 10 em substituição ao antigo IBM 1130.

Com o novo sistema implantado, cuja capacidade de memória é bastante superior ao antigo, temos condições de obter a solução de sistemas de equações lineares de porte bastante superior ao que se obtinha, com o antigo, ao se aplicar um método direto. O mesmo não ocorre com a maioria das Universidades Brasileiras, onde os computadores digitais apresentam capacidade inferior de memória.

Motivados por isto, testam-se alguns métodos iterativos que permitem obter a solução de sistemas de equações normais de dimensões elevadas. O assunto está bastante diversificado na literatura matemática,

mas com características de cunho teórico.

Alguns métodos iterativos apresentam a importante propriedade de sempre convergir para a solução de um sistema de equações lineares, quando tal sistema for normal. Pelo motivo anterior e com a propriedade que apresentam os computadores digitais de executar fácil e rapidamente cálculos repetidos ciclicamente, foram testados e comparados métodos iterativos no DEC-SYSTEM 10 onde se obteve resultados satisfatórios para um determinado processo iterativo.

No Capítulo II abordam-se elementos matemáticos necessários ao estudo e dedução dos processos iterativos. No Capítulo III apresentam-se alguns princípios para o estabelecimento de processos iterativos. No Capítulo IV apresentam-se o desenvolvimento teórico dos métodos iterativos de Jacobi, Gauss-Seidel, Sussessive Over Relaxation (Gauss-Seidel acelerado) e Gradientes Conjugados, acompanhados de seus respectivos algoritmos. Ainda no Capítulo IV, é feito o estudo da convergência dos métodos iterativos. No Capítulo V são apresentados testes computacionais comparativos aplicados aos métodos iterativos. No Apêndice estão incluídos alguns programas em linguagem fortran, que se entende possam ser úteis ao usuário.

CAPÍTULO II

P R E L I M I N A R E SCONCEITO DE LIMITE EM ÁLGEBRA LINEARLimites de vetores

Considere-se a seqüência de vetores abaixo:

$$x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}),$$

$$x^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}),$$

$$x^{(3)} = (x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, x_3^{(3)}, \dots, x_n^{(3)}),$$

•
•
•

$$x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}), \quad (2.1.1)$$

•
•
•

onde os $x_i^{(k)}$, com $i = 1, 2, 3, \dots, n$, são suas componentes.

Se, para cada componente $x_i^{(k)}$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$), existir um limite $\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = x_i$, então o vetor x , de componentes $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, é chamado LIMITE da se

seqüência de vetores $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \dots, x^{(k)}, \dots$, e a seqüência converge para o vetor $X = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$.

Denota-se tal fato por

$$x^{(k)} \longrightarrow X \quad \text{ou} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = X. \quad (2.1.2)$$

2.2 NORMA DE VETORES

2.2.1 Conceituação

Por norma de um vetor X entende-se um número real $||X||$ que satisfaz às condições:

$$||X|| > 0 \quad \forall X \neq 0 \quad \text{e} \quad ||X|| = 0 \leftrightarrow X = 0; \quad (2.2.1)$$

$$||kX|| = |k| \, ||X|| \quad \forall \quad k \in \mathbb{R}; \quad \text{e} \quad (2.2.2)$$

$$||X+Y|| \leq ||X|| + ||Y||. \quad (2.2.3)$$

A (2.2.3) é denominada desigualdade triangular.

Das condições (2.2.2) e (2.2.3) pode-se provar que

$$||X - Y|| \geq \left| ||X|| - ||Y|| \right|. \quad (2.2.4)$$

De fato, aplicando a condição (2.2.3) obtêm-se:

$$||Y|| = ||X + (Y - X)|| \leq ||X|| + ||Y - X|| \quad .^{\circ}.$$

$$||Y - X|| \geq ||Y|| - ||X|| \quad .^{\circ}.$$

$$||Y - X|| \geq -(||X|| - ||Y||) \quad . \quad (2.2.5)$$

Pela condição (2.2.2), pode-se escrever:

$$||(-1)(Y - X)|| = |(-1)| ||Y - X|| \quad .^{\circ}.$$

$$||X - Y|| = ||Y - X||. \quad (2.2.6)$$

De (2.2.5) e (2.2.6), atendida a (2.2.1), vem:

$$||X - Y|| \geq \left| ||X|| - ||Y|| \right|$$

Tipos de normas vetoriais

Seja o vetor $X = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$.

Definem-se os seguintes tipos de normas vetoriais:

$$1^{\circ} \quad ||X||_m = \max_i |x_i|, \text{ que é a m-norma;} \quad (2.2.7)$$

$$2^{\circ} \quad ||X||_{\ell} = \sum_i |x_i|, \text{ que é a } \ell\text{-norma;} \quad (2.2.8)$$

$$3^{\circ} \quad ||X||_k = \sqrt{\sum_i |x_i|^k}, \text{ que é a k-norma.} \quad (2.2.9)$$

Se as componentes do vetor X são reais, tem-se:

$$||X||_k = \sqrt{\sum_i x_i^2}. \quad (2.2.10)$$

2.2.3 Verificação das condições de norma de um vetor para as ℓ , m e k normas

As condições (2.2.1) e (2.2.2) são facilmente observadas.

2.2.3.1 Verificação da condição (2.2.3) para a:

2.2.3.1-a m - norma

Sejam os vetores

$$X = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \quad e$$

$$Y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n). \quad \text{Tem-se:}$$

$$||X+Y||_m = \max_i |x_i + y_i| \leq \max_i |x_i| + \max_i |y_i| \quad \dots$$

$$||X + Y||_m \leq ||X||_m + ||Y||_m$$

ℓ - norma

Aqui

$$||X + Y||_\ell = \sum_i |x_i + y_i| \leq \sum_i |x_i| + \sum_i |y_i| \dots$$

$$||X + Y||_\ell \leq ||X||_\ell + ||Y||_\ell$$

k - norma

Tem-se:

$$||X+Y||_k = \sqrt{\sum_i |x_i + y_i|^2} = \sqrt{\sum_i |x_i|^2 + \sum_i |y_i|^2 + 2\sum_i |x_i| |y_i|}$$

Aplicando a desigualdade de CAUCHY-SCHWARZ [01]:

$$\sum_i |x_i| |y_i| \leq \sqrt{\sum_i |x_i|^2} \sqrt{\sum_i |y_i|^2}$$

em:

$$||X+Y||_k \leq \sqrt{\sum_i |x_i|^2 + \sum_i |y_i|^2 + 2 \sqrt{\sum_i |x_i|^2} \sqrt{\sum_i |y_i|^2}} \dots$$

$$||X+Y||_k \leq \sqrt{\left[\sqrt{\sum_i |x_i|^2} + \sqrt{\sum_i |y_i|^2} \right]^2} \dots$$

$$||X+Y||_k \leq \sqrt{\sum_i |x_i|^2} + \sqrt{\sum_i |y_i|^2} \dots$$

$$||X+Y||_k \leq ||X||_k + ||Y||_k$$

Exemplo 2.1:

$$\text{Seja } X = (1, -2, 3) \text{ ou } X = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Tem-se:

$$||X||_m = \max_i |x_i| = 3,$$

$$||X||_\ell = \sum_i |x_i| = |x_1| + |x_2| + |x_3| = |1| + |-2| + |3| = 6,$$

$$\text{e } ||X||_k = \sqrt{\sum_i x_i^2} = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}.$$

2.3

VALOR ABSOLUTO E NORMA DE UMA MATRIZ

Sejam as matrizes reais A e B de mesma dimensão.

A desigualdade

$$A \leq B, \quad (2.3.1)$$

entre as matrizes $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ significa que

$$a_{ij} \leq b_{ij}. \quad (2.3.2)$$

2.3.1

Valor absoluto

Valor absoluto ou módulo de uma matriz real

$A = [a_{ij}]$ é a matriz

$$|A| = \left[|a_{ij}| \right] . \quad (2.3.3)$$

Se A e B são matrizes para as quais as operações $A + B$ e $A B$ têm sentido, vem:

$$|A + B| \leq |A| + |B|; \quad (2.3.4)$$

$$|A B| \leq |A| \cdot |B|; \quad (2.3.5)$$

$$|k A| = |k| |A|, \quad \forall \quad k \in \mathbb{R} . \quad (2.3.6)$$

Em particular, designando por p um número natural qualquer:

$$|A^p| \leq |A|^p . \quad (2.3.7)$$

Norma

Norma de uma matriz $A = [a_{ij}]$ é um número real $||A||$ que satisfaz às condições:

$$||A|| \geq 0, \quad ||A|| = 0, \text{ se for } A = 0; \quad (2.3.8)$$

$$||k A|| = |k| \cdot ||A||, \quad \forall \quad k \in \mathbb{R}; \quad (2.3.9)$$

$$||A + B|| \leq ||A|| + ||B||; \quad (2.3.10)$$

$$\text{e } ||AB|| \leq ||A|| ||B||; \quad (2.3.11)$$

onde A e B são matrizes para as quais as operações correspondentes têm sentido.

No caso particular de A ser uma matriz quadrada e p um número natural ocorre:

$$||A^p|| \leq ||A||^p. \quad (2.3.12)$$

Nota-se ainda uma desigualdade importante nas normas das matrizes A e B de mesma ordem:

Aplicando a condição (2.3.10)

$$||B|| = ||A + (B - A)|| \leq ||A|| + ||B - A|| \quad .\cdot.$$

$$||B - A|| \geq ||B|| - ||A|| \quad .\cdot.$$

$$||B - A|| \geq -(||A|| - ||B||) \quad (2.3.13)$$

Pela condição (2.3.9)

$$||(-1)(B - A)|| = |-1| ||B - A|| = ||A - B|| \quad .\cdot.$$

$$||A - B|| = ||B - A|| \quad (2.3.14)$$

De (2.3.13) e (2.3.14) vem:

$$||A - B|| \geq \left| ||A|| - ||B|| \right|. \quad (2.3.15)$$

Norma canônica de uma matriz

Assim é denominada a norma de uma matriz que verifica as condições suplementares (2.3.16) a (2.3.19).

Se $A = [a_{ij}]$, então:

$$|a_{ij}| \leq ||[a_{ij}]||. \quad (2.3.16)$$

Para uma matriz escalar $A = [a_{11}]$ tem-se:

$$||A|| = |||a_{11}||| = |a_{11}| \quad (2.3.17)$$

a desigualdade $|A| \leq |B|$ (A e B são matrizes de mesma dimensão) conduz à desigualdade

$$||A|| \leq ||B||; \quad (2.3.18)$$

e, em particular:

$$||A|| = \left| ||A|| \right|. \quad (2.3.19)$$

Tipos de normas matriciais

Para a matriz $A = [a_{ij}]$ de ordem n , considera-se três normas facilmente calculáveis:

$$||A||_m = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \text{ que é a m-norma; } (2.3.20)$$

$$||A||_\ell = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|, \text{ que é a } \ell\text{-norma; } (2.3.21)$$

$$||A||_k = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}, \text{ que é a k-norma. } (2.3.22)$$

Exemplo 2.2:

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & -9 \end{bmatrix}$. Então:

$$||A||_m = \max_i (1+2+3, 4+5+6, 7+8+9) = \max(6, 15, 24) = 24;$$

$$||A||_\ell = \max_j (1+4+7, 2+5+8, 3+6+9) = \max(12, 15, 18) = 18;$$

$$\text{e } ||A||_k = \sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2} = \sqrt{285}.$$

2.3.5 Verificação das condições de norma de uma matriz para

as normas $||A||_m, ||A||_\ell, ||A||_k$.

As condições (2.3.8) e (2.3.9) são facilmente verificáveis.

Verificação da condição (2.3.10) para a:

a m - norma

Sejam $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ matrizes de mesma dimensão. Então:

$$||A + B||_m = \max_i \sum_j |a_{ij} + b_{ij}| \leq \max_i \{ \sum_j |a_{ij}| + \sum_j |b_{ij}| \}$$

$$\leq \max_i \sum_j |a_{ij}| + \max_i \sum_j |b_{ij}| = ||A||_m + ||B||_m \quad .^{\circ}.$$

$$||A + B||_m \leq ||A||_m + ||B||_m .$$

b ℓ - norma

Tem-se:

$$||A + B||_{\ell} = \max_j \sum_i |a_{ij} + b_{ij}| \leq \max_j \{ \sum_i |a_{ij}| + \sum_i |b_{ij}| \}$$

$$\leq \max_j \sum_i |a_{ij}| + \max_j \sum_i |b_{ij}| = ||A||_{\ell} + ||B||_{\ell} \quad .^{\circ}.$$

$$||A + B||_{\ell} \leq ||A||_{\ell} + ||B||_{\ell}$$

c k - norma

Tem-se:

$$\begin{aligned} ||A + B||_k &= \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij} + b_{ij}|^2} \leq \\ &\leq \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2 + \sum_{i,j} |b_{ij}|^2 + 2 \sum_{i,j} |a_{ij}| |b_{ij}|}. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de CAUCHY-SCHWARZ, a saber,

$$\sum_{i,j} |a_{ij}| |b_{ij}| \leq \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i,j} |b_{ij}|^2},$$

vem:

$$||A+B||_k \leq \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2 + \sum_{i,j} |b_{ij}|^2 + 2 \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i,j} |b_{ij}|^2}} \dots$$

$$||A+B||_k \leq \sqrt{\left[\sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2} + \sqrt{\sum_{i,j} |b_{ij}|^2} \right]^2} \dots$$

$$||A+B||_k \leq \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2} + \sqrt{\sum_{i,j} |b_{ij}|^2} \dots$$

$$||A+B||_k \leq ||A||_k + ||B||_k.$$

2.3.5.2 Verificação da condição (2.3.11):

Seja a matriz $A = [a_{ij}]$ de dimensão $m' \times n'$ e a matriz $B = [b_{ij}]$ de dimensão $m'' \times n''$. Para que o produto de A por B seja possível, é necessário que $m'' = n'$. A matriz produto será de dimensão $m' \times n''$.

a m - norma

Tem-se:

$$||A B||_m = \max_i \sum_{j=1}^{n''} \left| \sum_{s=1}^{n'} a_{is} b_{sj} \right| \leq$$

$$\leq \max_i \left\{ \sum_{j=1}^{n''} \sum_{s=1}^{n'} |a_{is}| |b_{sj}| \right\} \dots$$

$$||A B||_m \leq \max_i \left\{ \sum_{s=1}^{n'} |a_{is}| \sum_{j=1}^{n''} |b_{sj}| \right\} \dots$$

$$||A B||_m \leq \max_i \left\{ \sum_{s=1}^{n'} |a_{is}| \cdot ||B||_m \right\} \dots$$

$$||A B||_m \leq \max_i \left\{ \sum_{s=1}^{n'} |a_{is}| \right\} \cdot ||B||_m = ||A||_m ||B||_m$$

b ℓ - norma

$$||A B||_\ell = \max_j \sum_{i=1}^{m'} \left| \sum_{s=1}^{n'} a_{is} b_{sj} \right| \leq$$

$$\leq \max_j \left\{ \sum_{i=1}^{m'} \sum_{s=1}^{n'} |a_{is}| |b_{sj}| \right\} \dots$$

$$||A B||_\ell \leq \max_j \left\{ \sum_{s=1}^{n'} |b_{sj}| \sum_{i=1}^{m'} |a_{is}| \right\} \dots$$

$$||A B||_{\ell} \leq \max_j \left\{ \sum_{s=1}^{n'} |b_{sj}| \right\} ||A||_{\ell} \dots$$

$$||A B||_{\ell} \leq ||A||_{\ell} \cdot \max_j \sum_{s=1}^{n'} |b_{sj}| = ||A||_{\ell} \cdot ||B||_{\ell} \dots$$

$$||A B||_{\ell} \leq ||A||_{\ell} ||B||_{\ell} .$$

2.3.5.2-c k - norma

Tem-se:

$$||A B||_k = \sqrt{\sum_{i=1}^{m'} \sum_{j=1}^{n''} \left| \sum_{s=1}^{n'} a_{is} b_{sj} \right|^2}$$

$$\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{m'} \sum_{j=1}^{n''} \left\{ \sum_{s=1}^{n'} |a_{is}| |b_{sj}| \right\}^2}$$

Aplicando a desigualdade de CAUCHY-SCHWARZ e levando em consideração que $m'' = n'$, tem-se:

$$||A B||_k \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{m'} \sum_{j=1}^{n''} \left\{ \sum_{s=1}^{n'} |a_{is}|^2 \cdot \sum_{t=1}^{m''} |b_{tj}|^2 \right\}} \dots$$

$$||A B||_k \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{m'} \sum_{s=1}^{n'} |a_{is}|^2 \cdot \sum_{t=1}^{m''} \sum_{j=1}^{n''} |b_{tj}|^2} \dots$$

$$||A B||_k \leq \sqrt{||A_k||^2 ||B_k||^2} \dots$$

$$||A B||_k \leq ||A||_k ||B||_k \dots$$

TEOREMA 2.1

As normas $||A||_m$, $||A||_\ell$, $||A||_k$ são canônicas.

Demonstração: Seja a_{pq} o maior elemento em módulo da matriz $A = [a_{ij}]$ de dimensão $m' \times n'$. Tem-se:

$$||A||_m \geq |a_{p1}| + |a_{p2}| + |a_{p3}| + \dots + |a_{pq}| + \dots + |a_{pn'}| \geq |a_{pq}|,$$

$$||A||_\ell \geq |a_{1q}| + |a_{2q}| + |a_{3q}| + \dots + |a_{pq}| + \dots + |a_{m'q}| \geq |a_{pq}|$$

$$||A||_k = \sqrt{\sum_{i=1}^{m'} \sum_{j=1}^{n'} |a_{ij}|^2} \geq |a_{pq}|.$$

Assim:

$$|a_{ij}| \leq |a_{pq}| \leq ||A||_s, \quad (\text{para } s=m, \ell, k).$$

Em particular, se $A = [a_{11}]$, vem:

$$||A||_m = ||A||_\ell = ||A||_k = |a_{11}|.$$

Em seguida, se $|A| \leq |B|$, onde $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$, temos:

$|a_{ij}| \leq |b_{ij}|$. Da definição de normas $||A||_m$, $||A||_\ell$ e $||A||_k$, surge que as desigualdades $||A||_s \leq ||B||_s$, ($s = m, \ell, k$), são válidas.

Verifica-se também que $||A||_s = |||A|||_s$ ($s=m, \ell, k$),

Desta forma demonstramos que as normas $||A||_m$,
 $||A||_\ell$, $||A||_k$ são CANÔNICAS.

2.3.6 Caso particular das normas m, ℓ, k para a matriz identidade

Seja I a matriz identidade de ordem n . Tem-se:

$$||I||_m = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = 1 ;$$

$$||I||_\ell = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}| = 1 ;$$

$$e \quad ||I||_k = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2} = \sqrt{n} .$$

2.4 LIMITE DE UMA SEQUÊNCIA DE MATRIZES

Seja uma sequência de matrizes

$$A_k = \begin{bmatrix} a_{ij}^{(k)} \end{bmatrix} , \quad (k = 1, 2, \dots) , \quad (2.4.1)$$

de mesma dimensão $m \times n$,

$$(i = 1, 2, 3, \dots, m; \quad j = 1, 2, 3, \dots, n) .$$

Por limite da sequência de matrizes A_k entende

se a matriz

$$A = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \left[\lim_{k \rightarrow \infty} (a_{ij}^{(k)}) \right]. \quad (2.4.2)$$

Neste caso, designa-se o fato por $A_k \longrightarrow A$.

A seqüência de matrizes que possui um limite chama-se convergente.

TEOREMA 2.2

Para que uma seqüência de matrizes $A_k, (k=1,2,\dots)$, seja convergente para uma matriz A , é necessário e suficiente que:

$$||A - A_k|| \longrightarrow 0 \text{ quando } k \longrightarrow \infty, \quad (2.4.3)$$

onde $||A||$ é uma norma canônica qualquer da matriz A .
E ainda:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} ||A_k|| = ||A||. \quad (2.4.4)$$

Demonstração: Com efeito, se $A_k \longrightarrow A$, com $A = [a_{ij}]$, tem-se:

dado $\epsilon > 0$, $|a_{ij} - a_{ij}^{(k)}| < \epsilon$, para k suficientemente grande.

Resulta: $|A - A_k| < \epsilon I$, onde I é uma matriz com todos

os elementos iguais a unidade.

Em virtude das propriedades de norma matricial ,
tem-se:

$$||A - A_k|| \leq \epsilon ||I|| .$$

Assim:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} ||A - A_k|| = 0 \quad (2.4.5)$$

Reciprocamente, supondo que a condição (2.4.3)

$$||A - A_k|| \rightarrow 0 \quad \text{seja válida, resulta:}$$

$$||a_{ij} - a_{ij}^{(k)}|| \leq ||A - A_k|| < \epsilon .$$

$$\text{Por conseguinte} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij} \quad \text{e} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = A.$$

Em outras palavras, se $A_k \rightarrow A$, temos:

$$\left| ||A|| - ||A_k|| \right| \leq ||A - A_k|| \rightarrow 0 , \quad \text{para } k \rightarrow \infty .$$

consequentemente:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} ||A_k|| = ||A|| , \text{ pois}$$

$$\left| ||A_k|| - ||A|| \right| \leq ||A_k - A|| .$$

COROLÁRIO 2.1 - A seqüência $A_k \rightarrow 0$, quando $k \rightarrow \infty$, se

e somente se $\lim_{k \rightarrow \infty} ||A_k|| = 0$, onde $||A_k||$ é uma norma canônica qualquer.

Propriedades

Sejam os limites

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = A \quad \text{e} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} B_k = B .$$

Então:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (A_k \pm B_k) = A \pm B ; \quad (2.4.6)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (A_k \cdot B_k) = A B ; \quad (2.4.7)$$

$$\text{e} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} A_k^{-1} = A^{-1}, \text{ com } (\det A \neq 0), \quad (2.4.8)$$

na hipótese de que as operações matriciais entre A e B fazem sentido.

Em particular, se C é uma matriz constante tal que ela torna possível os produtos CA_k e $A_k C$, com $(k=1, 2, \dots)$, encontra-se:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} CA_k = C A \quad (2.4.9)$$

$$\text{e} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} A_k C = A C . \quad (2.4.10)$$

TEOREMA 2.3

Para que a seqüência de matrizes $A_k (k=1,2,3,\dots)$ seja convergente, é necessário e suficiente que se observe o critério geral de convergência de seqüências de CAUCHY, e notadamente, para todo $\epsilon > 0$, deve existir um número $N = N(\epsilon)$ tal que para $k > N$ e $p > 0$ $||A_{k+p} - A_k|| < \epsilon$, com $||A_k||$ representando uma norma canônica qualquer.

Demonstração: Se a desigualdade $||A_{k+p} - A_k|| < \epsilon$ é verificada, todo elemento $a_{ij}^{(k)}$ da matriz A_k satisfaz ao critério de CAUCHY $|a_{ij} - a_{ij}^{(k)}| < \epsilon$, quando $k > N$, e, por conseguinte, existe um limite

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \left[\lim_{k \rightarrow \infty} a_{ij}^{(k)} \right].$$

Reciprocamente, se existe $A = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k$, o teorema (2.2) conduz a $||A - A_k|| \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$, e a desigualdade $||A_{k+p} - A_k|| < \epsilon$ é válida.

2.5 SÉRIES MATRICIAIS

2.5.1 Introdução

Utilizando a noção de limite de uma matriz podemos introduzir o conceito de séries matriciais,

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N A_k, \quad (2.5.1)$$

onde A_k são matrizes de mesma dimensão.

Se o limite (2.5.1) existe, a série matricial é CONVERGENTE e a matriz obtida no limite será dita soma desta série.

Se o limite (2.5.1) não existe, a série matricial é DIVERGENTE e não define nenhuma soma.

Condição necessária de convergência de uma série matricial

TEOREMA 2.4

Se a série matricial (2.5.1) CONVERGE, então:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = 0.$$

Demonstração: Seja $S_k = \sum_{j=1}^k A_j$.

Se a série $\sum_{k=1}^{\infty} A_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N A_k$ converge, existe

uma matriz limite,

$$S = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k,$$

e tem-se:

$$A_k = S_k - S_{k-1},$$

$$\text{com } S_k = \sum_{j=1}^k A_j = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_k \quad \text{e}$$

$$S_{k-1} = \sum_{j=1}^{k-1} A_j = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_{k-1},$$

$$\text{portanto, } \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (S_k - S_{k-1}) =$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} S_k - \lim_{k \rightarrow \infty} S_{k-1} = S - S = 0 \quad \text{ou}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = 0.$$

Definição 2.1

$$\text{Se a série } \sum_{k=1}^{\infty} |A_k| \quad \text{converge,} \quad (2.5.2)$$

$$\text{então a série matricial } \sum_{k=1}^{\infty} A_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N A_k,$$

se denomina **ABSOLUTAMENTE CONVERGENTE**.

TEOREMA 2.5

Uma série matricial absolutamente convergente é convergente.

Demonstração: Seja $A_k = [a_{ij}^{(k)}]$, com $(k=1, 2, 3, \dots)$, vem:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_k| = \left[\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ij}^{(k)}| \right]. \quad (2.5.3)$$

Se a série matricial $\sum_{k=1}^{\infty} |A_k|$ é convergente, to
da série numérica

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ij}^{(k)}|, \quad (i=1,2,\dots,m; \quad j=1,2,\dots,n),$$

é por definição convergente.

Sabe-se da teoria das séries que todas as sé
ries $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ij}^{(k)}, (i=1,2,\dots,m),$ convergem, isto é, existe
um limite $S = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N A_k$ e, por consequin-
te, a série matricial (2.5.3) converge.

TEOREMA 2.6

Se $||A||$ é uma norma canônica qualquer e a sé-
rie numérica $\sum_{k=1}^{\infty} ||A_k||$ converge, a série matricial
 $\sum_{k=1}^{\infty} A_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N A_k$ converge igualmente e sua conver-
gência é absoluta.

Demonstração: Seja

$$A_k = \left[a_{ij}^{(k)} \right], \text{ com } (k = 1, 2, \dots).$$

Considere-se a série numérica

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ij}^{(k)} \quad (2.5.4)$$

$$(i = 1, 2, \dots, m) \quad e \quad j = (1, 2, \dots, m)$$

Sendo $|a_{ij}^{(k)}| \leq ||A_k||$, por ser $||A_k||$ norma canônica, toda série (2.5.4) converge e sua convergência é absoluta.

Por definição, a série matricial

$\sum_{k=1}^{\infty} A_k = \left[\sum_{k=1}^{\infty} a_{ij}^{(k)} \right]$ converge e sua convergência é absoluta.

2.5.3 Séries de potências

Para toda série de potências

$$C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + C_3(x-a)^3 + \dots + C_n(x-a)^n + \dots, \quad (2.5.5)$$

onde $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$ e a são números reais, existe um intervalo de números reais, denominado intervalo de convergência: $|x-a| < R$, com centro no ponto $x=a$, em cujo interior a série (2.5.5) é absolutamente con-

vergente. Quando $|x-a| > R$, a série (2.5.5) é divergente. Aqui R é denominado raio de convergência. O raio de convergência pode ser em alguns casos igual a 0 ou a ∞ .

Nos pontos extremos $x = a \pm R$ do intervalo de convergência da série (2.5.5) pode ocorrer, tanto a convergência como a divergência.

Se $z = x + yi$ é uma variável complexa, para a série de potências

$$C_0 + C_1(z-z_0) + C_2(z-z_0)^2 + \dots + C_n(z-z_0)^n + \dots \quad (2.5.6)$$

$$(C_n = a_n + b_n i, \quad z_0 = x_0 + y_0 i) \quad ,$$

existe um determinado círculo no plano complexo denominado círculo de convergência, dado por $|z-z_0| < R$, com centro no ponto $z = z_0$, em cujo interior a série é absolutamente convergente.

Nos pontos situados sobre a circunferência deste círculo de convergência a série (2.5.6) pode ser tanto convergente como divergente.

Séries de potências matriciais

Importantes séries de potências matriciais ocorrem em aplicações, tais como:

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k X^k \quad (2.5.7)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} X^k A_k, \quad (2.5.8)$$

onde:

X^k são matrizes $n \times n$;

A_k , em (2.5.7), são matrizes $m \times n$ ou vetores linha ;

A_k , em (2.5.8), são matrizes $n \times m$ ou vetores coluna.

TEOREMA 2.7

Se ρ é o raio de convergência de uma série de potências, então

$$\sum_{k=0}^{\infty} ||A_k|| X^k, \quad (2.5.9)$$

onde $||A_k||$, com $(k=0,1,2,\dots)$, é uma norma canônica qualquer, as séries matriciais (2.5.7) e (2.5.8), sempre convergem, sendo

$$||X|| < \rho. \quad (2.5.10)$$

Em particular, a série matricial $\sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$, com constantes a_k e $(k=0,1,2,\dots)$ converge com $||X|| < \rho$,

onde r é o raio de convergência da série inteira:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| x^k.$$

Demonstração: Foi visto que:

$$||A_k x^k|| \leq ||A_k|| ||x||^k.$$

A desigualdade (2.5.10) ocasiona a convergência da série $\sum_{k=0}^{\infty} ||A_k x^k||$.

Por conseguinte, em virtude do teorema (2.6) a série (2.5.7) converge igualmente.

Analogamente demonstra-se também para a série (2.5.8).

A segunda proposição do teorema se deduz do fato de que, se a_k é um escalar, $||a_k|| = |a_k|$.

TEOREMA 2.8

As progressões geométricas

$$A + AX + AX^2 + AX^3 + \dots + AX^k \quad (2.5.11)$$

e

$$A + XA + X^2A + X^3A + \dots + X^kA + \dots, \quad (2.5.12)$$

nas quais X é uma matriz quadrada, convergem se:

$$||X|| < 1 \quad (2.5.13)$$

e a convergência é dada por:

$$\sum_{k=0}^{\infty} AX^k = A(I - X)^{-1} \quad (2.5.14)$$

e

$$\sum_{k=0}^{\infty} X^k A = (I - X)^{-1} A, \quad (2.5.15)$$

onde I é a matriz identidade.

Demonstração: Em virtude do teorema (2.7) e da condição (2.5.13), a progressão geométrica (2.5.11) converge se existir uma matriz

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} AX^k. \quad (2.5.16)$$

Consideremos a identidade

$$\begin{aligned} (AI + AX + AX^2 + AX^3 + \dots + AX^k)(I-X) &= \\ &= A - AX + AX - AX^2 + AX^2 - AX^3 + AX^3 - \dots + \\ &(-AX^k) + AX^k - AX^{k+1} = A - AX^{k+1} = A(I-X^{k+1}) \end{aligned}$$

$$\text{ou} \quad A(I+X+X^2+X^3+\dots+X^k)(I-X) = A(I-X^{k+1}). \quad (2.5.17)$$

Levando ao limite a igualdade (2.5.17), quando $k \rightarrow \infty$, e tendo em vista que em virtude da condição

(2.5.13)

$X^{k+1} \rightarrow 0$, quando $k \rightarrow \infty$, vem:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A(I + X + X^2 + X^3 + \dots + X^k)(I-X) =$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} A(I - X^{k+1}) \quad \therefore$$

$$S(I - X) = AI = A. \quad (2.5.18)$$

Em particular, se na igualdade (2.5.18) fizermos $A = I$, obtemos:

$$S_1(I - X) = I,$$

onde

$$S_1 = \sum_{k=0}^{\infty} X^k.$$

Assim resulta

$$(\det S_1) [\det(I-X)] = \det I \quad \text{ou}$$

$$\det S_1 \det(I-X) = 1.$$

Logo, $\det(I-X) \neq 0$, e, em consequência, a matriz $I-X$ é regular, isto é:

$$(I-X)^{-1} \text{ existe.}$$

Multiplicando os dois lados de (2.5.18) por $(I-X)^{-1}$, vem:

$$S(I-X)(I-X)^{-1} = A(I-X)^{-1} \therefore$$

$$SI = A(I-X)^{-1}$$

ou

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} AX^k = A(I-X)^{-1}.$$

Analogamente

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} X^k A = (I-X)^{-1} A,$$

para $||X|| < 1$.

COROLÁRIO 2.2 - Se $||X|| < 1$, existe uma matriz inversa $(I-X)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} X^k$ e, ainda, se $||I|| = 1$,

$$||I-X||^{-1} \leq \sum_{k=0}^{\infty} ||X||^k = \frac{1}{1-||X||} \quad (2.5.19)$$

Observação: Se $||X|| < 1$, o desenvolvimento da norma do resto de uma série matricial

$$A + AX + AX^2 + AX^3 + \dots + AX^k + \dots$$

é dado por:

$$\begin{aligned}
 R_k &= ||A(I-X)^{-1} - A(I+X+X^2+X^3+\dots+X^k)|| \\
 &\leq ||A|| ||X^{k+1} + X^{k+2} + \dots|| \leq ||A|| (||X||^{k+1} + \\
 &+ ||X||^{k+2} + \dots) = \frac{||A|| ||X||^{k+1}}{1-||X||} \cdot \quad (2.5.20)
 \end{aligned}$$

FORMA QUADRÁTICA

Definição 2.2

Um polinômio inteiro, homogêneo do 2º grau, com n variáveis, denomina-se forma quadrática em tais variáveis. Isto é: seus termos são todos do 2º grau.

Se x_1, x_2, \dots, x_n forem as n variáveis, qualquer forma quadrática nestas variáveis pode ser escrita como:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = u(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.6.1)$$

Desenvolvendo a (2.6.1), vem:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j = a_{11} x_1^2 + a_{21} x_2 x_1 + a_{31} x_3 x_1 + \dots + a_{n1} x_n x_1 +$$

$$+ a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 + a_{32} x_3 x_2 + a_{42} x_4 x_2 + \dots +$$

$$+ a_{n2} x_n x_2 + a_{13} x_1 x_3 + a_{23} x_2 x_3 + a_{33} x_3^2 +$$

$$+ a_{43}x_4x_3 + \dots + a_{n3}x_nx_3 + \dots +$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$+ a_{1n}x_1x_n + a_{2n}x_2x_n + a_{3n}x_3x_n + \dots + a_{nn}x_n^2$$

Nota-se que, para quaisquer $h \neq k$, o termo em $x_h x_k$ é decomponível, de infinitas maneiras, numa soma de dois outros.

Seja $C = a_{hk} + a_{kh}$, então:

$$C x_h x_k = (a_{hk} + a_{kh}) x_h x_k = a_{hk} x_h x_k + a_{kh} x_k x_h.$$

Por questão de unicidade, introduzir-se-á a condição de simetria:

$$a_{ij} = a_{ji}, \text{ com } (i, j = 1, 2, \dots, n), \quad (2.6.2)$$

e, na decomposição acima, ter-se-á:

$$a_{hk} = a_{kh} = C/2.$$

Isto posto, sejam $A = (a_{ij})$ a matriz simétrica dos coeficientes de (2.6.1) e $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Assim, a (2.6.1) pode ser escrita:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j = X A X^T = u(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (2.6.3)$$

Desenvolvendo a (2.6.3), vem:

$$A X^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \dots + a_{1n} x_n \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \dots + a_{2n} x_n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + a_{n3} x_3 + \dots + a_{nn} x_n \end{bmatrix},$$

$$XAX^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n \end{bmatrix} \quad \therefore$$

$$\begin{aligned} XAX^T &= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \dots + a_{1n}x_1x_n \\ &+ a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + \dots + a_{2n}x_2x_n \\ &+ a_{31}x_1x_3 + a_{32}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 + \dots + a_{3n}x_3x_n \\ &\quad . \quad . \quad . \quad . \\ &+ a_{n1}x_1x_n + a_{n2}x_2x_n + a_{n3}x_3x_n + \dots + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

e, como $a_{ij} = a_{ji}$, vem:

$$\begin{aligned} XAX^T &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 \\ &+ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n \\ &+ 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n \\ &+ 2a_{34}x_3x_4 + 2a_{35}x_3x_5 + \dots + 2a_{3n}x_3x_n \end{aligned}$$

$$+ 2a_{45}x_4x_5 + 2a_{46}x_4x_6 + \dots + 2a_{4n}x_4x_n$$

$$+ \quad \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot$$

$$+ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

Igualando u , em (2.6.3), a uma constante, obtemos a equação de uma quádrica $u(x_1, x_2, \dots, x_n) = C$, com centro em um espaço de dimensão n .

A matriz $A = (a_{ij})$ chama-se matriz da forma quadrática (2.6.3).

Em virtude da condição (2.6.2), a matriz A é simétrica, isto é, ela coincide com a sua transposta. Inversamente, para toda matriz simétrica podemos construir uma forma quadrática dada por (2.6.3).

Definição 2.3

Uma forma quadrática (2.6.3) é dita definida positiva (negativa) se todos os seus valores característicos são positivos (negativos), exceto o valor para $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ |02|.

TEOREMA 2.9

Toda forma quadrática, com matriz dos coeficientes

tes real, pode ser transformada na seguinte forma canônica:

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \dots + \alpha_n y_n^2, \quad (2.6.4)$$

onde y_1, y_2, \dots, y_n são variáveis conectadas com as variáveis iniciais $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ por uma transformação linear não-singular. |03|

TEOREMA 2.10

Para uma forma quadrática ser definida positiva, é necessário e suficiente que todos os seus coeficientes sejam positivos após sua transformação para uma forma canônica. |04|

TEOREMA 2.11

(Critério de Sylvester). Uma forma quadrática $\sum a_{ij} x_i x_j$, é definida positiva se, e somente se, todos os determinantes

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

são positivos. |05|

Definição 2.4

O sistema linear

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (2.6.5)$$

é denominado NORMAL se:

1. A matriz dos coeficientes $A = (a_{ij})$ é simétrica, isto é:

$$a_{ij} = a_{ji}.$$

2. A forma quadrática correspondente é definida positiva.

Os sistemas de equações normais se apresentam na resolução de numerosos problemas. Por exemplo:

- a. Na aplicação do método dos mínimos quadrados.
- b. No ajustamento de uma rede de triangulação geodésica em sua etapa final.
- c. Nas observações indiretas, aplicando o método dos mínimos quadrados às equações de observação, resulta um sistema de equações normais.
- d. Nas observações diretas condicionadas, aplicando o método dos mínimos quadrados às equações dos correlatos, resulta também um sistema de equações normais.

O objetivo fundamental deste trabalho é encontrar a solução de tais sistemas por processos iterativos.

TEOREMA 2.12

Se os dois membros de um sistema linear

$$Ax = b, \quad (2.6.6)$$

com $A = (a_{ij})$ matriz regular, são multiplicados à esquerda pela transposta $A^T = (a_{ji})$, então o novo sistema

$$A^T Ax = A^T b, \quad (2.6.7)$$

que é equivalente ao sistema (2.6.6), será um sistema NORMAL .

Demonstração: Mostra-se, inicialmente, que a matriz $A^T A$ é simétrica;

$$(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A .$$

Mostremos agora que a forma quadrática associada à matriz $A^T A$ é definida positiva.

A forma quadrática da matriz $A^T A$ é:

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj} x_i x_j$$

Trocando a ordem do somatório, vem:

$$u = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ki} x_i a_{kj} x_j \dots$$

$$u = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ki} x_i \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j \right) \dots$$

$$u = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ki} x_i \sum_{i=1}^n a_{ki} x_i \right) \dots$$

$$u = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ki} x_i \right)^2 \geq 0 .$$

Por hipótese, $\det A = \det(a_{ij}) \neq 0$. Então o sistema homogêneo

$$\sum_{i=1}^n a_{ki} x_i = 0, \text{ com } (k = 1, 2, \dots, n),$$

admite somente a solução trivial $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

Por conseguinte $u(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$, se $x_i \neq 0$, para algum i .

CAPÍTULO III

PRINCÍPIOS PARA O ESTABELECIMENTO

DE MÉTODOS ITERATIVOS

ANÁLISE NUMÉRICA

Antes de introduzir os conceitos sobre métodos iterativos, tenta-se dar noções do que vem a ser uma análise numérica.

A matemática introduz conceitos que auxiliam a resolução dos mais diversos problemas científicos. No entanto, muitas vezes não podemos aplicá-los imediatamente em um determinado problema numérico.

A análise numérica procura adaptar meios necessários para que certos processos matemáticos se tornem exequíveis numericamente, ou de mais fácil solução. Pode-se dizer que a análise numérica é o ramo da matemática que desenvolve técnicas para a execução de problemas de cálculo numérico. Este trabalho estará voltado especificamente para a análise numérica de métodos iterativos para a resolução de sistemas de equações lineares e particularmente sistemas de equa-

ções lineares normais.

Os sistemas de equações lineares normais ocorrem, com muita frequência, nos problemas geodésicos, como no ajustamento de triangulações, poligonais, trilaterações, redes de nivelamento geométrico, levantamentos gravimétricos e também em fotogrametria analítica.

Com o objetivo de explorar o conceito e a importância de análise numérica, avalia-se a constante neperiana e . Encontramos dificuldades em atingir o exato valor de e . Sabemos do cálculo elementar que o limite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e = 2,7182818... \quad (3.1.1)$$

As dificuldades em se atingir o exato valor de e devem-se à complexidade das operações e, também, à impossibilidade de se atingir o limite (3.1.1). Assim, parece lógico procurar um processo de cálculo mais simples, que forneça um valor aproximado desse número, dentro de um certo grau de precisão considerado satisfatório. Isto é um processo de "Análise Numérica".

Como se vai trabalhar com uma certa aproximação, é preciso estabelecer critérios para avaliar o seu grau de precisão.

Admita-se um critério intuitivo: o de obter um valor aproximado cujos algarismos coincidam com os do valor exato, a partir da esquerda até o de certa casa decimal.

Casas decimais corretas: denominam-se assim os algarismos consecutivos coincidentes a partir da vírgula (ponto) decimal. Pode-se verificar o fato de que quando os algarismos de uma certa aproximação coincidem com os do valor exato até o da m -ésima casa decimal, a diferença entre os dois valores não ultrapassa, em módulo, a 10^{-m} .

Desenvolva-se a função $f(x) = e^x$ pela fórmula de MACLAURIN, a saber:

$$\begin{aligned} f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots + \\ + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \dots, \text{ o que dá:} \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

$$f(x) = e^x \longrightarrow f(0) = e^0 = 1 ;$$

$$f'(x) = e^x \longrightarrow f'(0) = e^0 = 1 ;$$

$$f''(x) = e^x \longrightarrow f''(0) = e^0 = 1 ;$$

.

.

.

$$f^{(n)}(x) = e^x \longrightarrow f^{(n)}(0) = e^0 = 1.$$

Substituindo $f(o), f'(o), \dots, f^{(n)}(o)$ em (3.1.2), vem:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (3.1.3)$$

Como se está interessado no particular valor de e , faça-se $x=1$ em (3.1.3) e obtem-se:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots \quad (3.1.4)$$

ou

$$e = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \quad , \quad (3.1.5)$$

que \tilde{e} , também, um limite inatingível, a exemplo de (3.1.1). Mas a (3.1.5) implica em operações aritméticas bem mais simples do que a (3.1.1).

Seja e' um valor aproximado de e , dado por

$$e' = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!}$$

Desta maneira pode-se escrever:

$$e - e' = \sum_{i=8}^{\infty} \frac{1}{i!} \neq 0.$$

É possível verificar facilmente que e' é um valor aproximado para e .

Deseja-se saber até que casa decimal podemos confiar nessa aproximação.

Considere-se:

$$\frac{1}{8!} = \frac{1}{8!} ;$$

$$\frac{1}{9!} = \frac{1}{8!9} < \frac{1}{8!9^0} ;$$

$$\frac{1}{10!} = \frac{1}{9!10} < \frac{1}{8!9^2} ;$$

$$\frac{1}{11!} = \frac{1}{10!11} < \frac{1}{8!9^3} . \quad (3.1.6)$$

Somando convenientemente as (3.1.6), vem:

$$\sum_{i=8}^{\infty} \frac{1}{i!} < \frac{1}{8!} \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{9^3} + \dots \right) .$$

A expressão entre parêntesis é a soma S dos termos de uma P.G. decrescente e ilimitada.

Sendo

$$S = \frac{a_1}{1-q} ; \quad a_1 = 1 ; \quad q = \frac{1}{9} ;$$

vem:

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} \quad \therefore \quad S = \frac{9}{8}$$

e, portanto:

$$e - e' < \frac{1}{8!} \cdot \frac{9}{8} = \frac{1}{35840} < 10^{-4}.$$

Então, pode-se esperar que o valor aproximado de e ,

$$e' = \sum_{i=0}^7 \frac{1}{i!} \text{ terá as quatro primeiras casas decimais}$$

corretas.

Sabendo-se que $e = 2,7182818\dots$, pode-se esperar que

$$e' = 2,7182.$$

Realmente, efetuando os cálculos obtem-se para

$$e' = \sum_{i=0}^7 \frac{1}{i!} = 2,7182538$$

Ocorreu de fato a coincidência de quatro casas decimais na aproximação, com as do valor exato.

Analisar-se-á agora o problema inverso, isto é, fi xado o número desejado de casas decimais corretas, de terminar que aproximação e' é preciso considerar. De vemos então calcular n tal que

$$e' = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!}$$

e

$$|e - e'| < 10^{-n}.$$

Generalizando o procedimento de $n=7$, obtem-se:

$$\frac{1}{(n+r)!} \leq \frac{1}{(n+1)!(n+2)^{r-1}}, \text{ com } (r=1,2,3,\dots), \quad (3.1.7)$$

o que, em particular, dão:

$$r = 1 \quad \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!};$$

$$r = 2 \quad \frac{1}{(n+2)!} \leq \frac{1}{(n+1)!(n+2)};$$

$$r = 3 \quad \frac{1}{(n+3)!} \leq \frac{1}{(n+1)!(n+2)^2}; \text{ e}$$

$$r = 4 \quad \frac{1}{(n+4)!} \leq \frac{1}{(n+1)!(n+2)^3}.$$

Somando membro a membro as desigualdades (3.1.7), vem:

$$\begin{aligned} \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i!} &\leq \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!(n+2)} + \frac{1}{(n+1)!(n+2)^2} + \\ &+ \frac{1}{(n+1)!(n+2)^3} + \dots \end{aligned}$$

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i!} \leq \frac{1}{(n+1)!} \left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+2)^3} + \dots \right] \dots$$

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i!} \leq \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1}. \quad (3.1.8)$$

O problema será resolvido com a procura do inteiro n ,

a partir de $n=1$, até que se tenha

$$\frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1} \leq 10^{-m} . \quad (3.1.9)$$

Os procedimentos da Análise Numérica assemelham-se em tudo ao exemplo dado.

Podemos observar a utilidade do computador como no caso da procura do inteiro n que define a aproximação prefixada.

Acabamos de apresentar um método numérico para o cálculo do número e , entre uma infinidade de outros existentes.

Em análise numérica, tem-se, normalmente, um grande número de métodos para a solução de um mesmo problema. É necessário escolher então o método que melhor se adapta, ou seja, o método mais eficiente para resolver um determinado problema, o que pode ser feito considerando-se principalmente os três critérios:

- precisão dos resultados.
- capacidade de conduzir os resultados desejados.
- esforço de cálculo dispendido na obtenção dos resultados.

Neste trabalho serão abordados alguns métodos iterativos para a resolução de sistemas de equações lineares oriundas de aplicações nas Ciências Geo

dênicas.

Faz-se, por enquanto, uma análise do último critério, uma vez que tanto para cálculos a mão como para os destinados a computadores digitais, procura-se minimizar o número de operações a efetuar. Realmente, quanto maior for o volume de cálculos envolvidos na aplicação de um método, tanto maior será o tempo de execução e, o que é pior, tanto mais sujeitos ao efeito dos erros estarão os resultados, especialmente os erros de arredondamento, típico de computadores digitais.

Partindo da hipótese de que uma multiplicação ou divisão entre dois números requer mais tempo de execução do que uma soma (adição ou subtração), define-se:

Definição 3.1.1 - Esforço computacional de um método numérico é o número total de multiplicações e divisões necessárias para a obtenção dos resultados.

Esta hipótese é válida somente para determinados computadores. Em computadores mais recentes, o tempo médio de uma soma em ponto flutuante, t_s , pode ser equiparado aos tempos médios t_m e t_d de multiplicação e divisão, respectivamente.

Por exemplo, valem as seguintes estimativas:

$$\text{IBM - 7040} \quad t_s \approx t_m/2; \quad t_d \approx 2t_m;$$

$$\text{IBM - 310} \quad t_s \approx t_m/4; \quad t_d \approx 2t_m.$$

Para estimar o tempo de cálculo necessário, o problema se torna mais complicado e deve-se, além de calcular o número de operações de cada tipo, levar em consideração muitos outros fatores. Nosso objetivo ao definir esforço computacional, é, apenas, avaliar uma ordem de grandeza do volume de cálculo implicado, para efeitos comparativos.

Para ilustrar a importância do esforço computacional, veja-se o

EXEMPLO 3.1.1

Suponhamos que deva ser resolvido um sistema de 10 equações com 10 incógnitas pela regra de CRAMER, onde cada determinante é calculado pela definição.

Para um sistema $(n \times n)$, aplicando a regra de Cramer, será necessário:

- O cálculo de n determinantes das incógnitas e um do sistema, isto é: $n+1$ determinantes $n \times n$.
- Cada determinante $n \times n$, pela definição, é um somatório de $n!$ parcelas.

- Cada parcela dessa soma é por sua vez um produto de n fatores que corresponde a $n-1$ multiplicações.

Logo, o total de multiplicações é:

$$(n+1) \cdot n! \cdot (n-1)$$

- O cálculo das incógnitas exige n divisões dos determinantes das incógnitas pelo determinante do sistema.

Então o esforço computacional para resolver um sistema de ordem $n \times n$, mediante a regra de Cramer, é

$$E_c = (n+1) \cdot n! \cdot (n-1) + n$$

Em termos de tempo, considerando-se, por exemplo, que uma multiplicação no IBM -7044 é realizada em 20 microssegundos, a resolução para o sistema 10×10 levaria pelo menos 2 horas. Se o sistema fosse 20×20 , o tempo requerido seria de seiscentos mil anos; logicamente tornar-se-ia de solução impossível com a aplicação de tal método. |06|

RECURSIVIDADE E ITERAÇÃO

Os computadores digitais apresentam a propriedade de executar fácil e rapidamente cálculos repetidos ciclicamente. Exemplificando:

Um produto p de n números reais a_i ($i=1,2,\dots,n$) pode

ser efetuado com o seguinte procedimento:

1º - Inicia-se com um valor $p_0 = 1$ e faz-se i variar de 1 em 1 a partir de $i=1$.

2º - Para cada valor de i , calcula-se o novo valor de p_i , multiplicando o antigo p_{i-1} por a_i , isto é, calcula-se $p_i = a_i p_{i-1}$.

3º - O valor de p_n é o produto procurado.

Uma grande parte dos métodos da ANALISE NUMÉRICA apresentam essa característica repetitiva que se denomina RECURSIVIDADE.

Definição 3.2.1 - Um processo RECURSIVO pode ser definido como um método de obtenção de um valor x passo a passo, onde o valor x_i fornecido no i -ésimo passo, depende tão somente de i e do valor x_{i-1} fornecido no passo anterior, e x é obtido após certo número n de passos (estágios, ciclos).

Pode-se traduzir tal fato por:

$$x_i = f(x_{i-1}, i), \text{ com } (i=1, 2, \dots, n), \quad (3.2.1)$$

sendo x_0 o valor inicial dado conforme o problema em

questão. A (3.2.1) é denominada fórmula de recorrência.

No exemplo do produto, a fórmula de recorrência era

$p_i = a_i p_{i-1}$ e, p_i dependia de p_{i-1} e do i -ésimo valor da sequência $\{a_i\}$.

A importância da recursividade pode ser ilustrada no

EXEMPLO 3.2.1

Seja o cálculo aproximado de e

$$e' = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!}$$

Considere-se os termos do somatório separadamente:

$$1^o \text{ termo} = 1, \quad EC = 0 ;$$

$$2^o \text{ termo} = 1, \quad EC = 0 ;$$

$$3^o \text{ termo} = \frac{1}{2!}, \quad EC = 1 ;$$

$$4^o \text{ termo} = \frac{1}{3!}, \quad EC = 2 ;$$

$$5^o \text{ termo} = \frac{1}{4!}, \quad EC = 3 ;$$

.

.

.

$$n^o \text{ termo} = \frac{1}{(n-1)!}, \quad EC = n-2 ;$$

sendo:

EC = esforço computacional.

O esforço computacional total é a soma dos (n-1) primeiros números naturais, isto é:

$$EC_1 = \frac{n(n-1)}{2} . \quad (3.2.2)$$

Adote-se agora um procedimento recursivo para o cálculo de e'.

Sejam

$$S_i = S_{i-1} + a_i, \text{ com } (i=1,2,3,\dots,n); \quad (3.2.3)$$

$$a_i = \frac{1}{i!} . \quad (3.2.4)$$

a_i por sua vez pode ser calculado recursivamente por:

$$a_0 = a_1 = 1$$

$$a_i = \frac{a_{i-1}}{i} , \text{ com } (i=1,2,3,\dots,n). \quad (3.2.5)$$

Assim, o esforço computacional a cada passo é 1. Como são necessários n-1 passos vem:

$$EC_2 = n - 1 \quad (3.2.6)$$

Comparando a (3.2.2) com (3.2.6) vemos que o esforço

computacional no caso não recursivo é proporcional a n^2 e no caso recursivo proporcional a n ..

Ocorrem processos recursivos que são infinitos, isto é, fornecem o valor procurado somente com um número infinito de passos, como no

EXEMPLO 3.2.2

O limite S de uma série infinita convergente $\{S_i\}$ pode ser obtido recursivamente por:

$$S_i = S_{i-1} + a_i, \text{ com } (i=1,2,3,\dots,n).$$

O valor S será obtido após um número infinito de somas.

Este trabalho estará voltado para um caso especial de métodos RECURSIVOS, que são os MÉTODOS ITERATIVOS, para resolver sistemas de equações lineares resultantes no ajustamento de observações geodésicas.

Definição 3.2.2 - Método Iterativo Simples é um processo de cálculo infinito, recursivo, onde o valor obtido a cada passo depende tão somente do valor obtido no passo anterior.

Definição 3.2.3 - ITERAÇÃO SIMPLES:

Denomina-se assim a cada passo referido na definição (3.2.2)

A partir de uma aproximação x_0 , a seqüência de aproximações de x pode ser obtida pela fórmula de recorrência

$$x_i = F(x_{i-1}) , \quad (3.2.7)$$

onde F é dita função de iteração e x_i é o valor obtido na i -ésima iteração.

O caso mais geral de métodos iterativos é aquele onde x_i depende dos valores $x_{i-1}, x_{i-2}, \dots, x_{i-m}$ obtidos nas m iterações anteriores.

Definição 3.2.4 - Dado o sistema linear

$Ax = b$, onde:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} .$$

Uma iteração de grau m define uma função da forma

$$x^{(k+1)} = F_k(A, b, x^{(k)}, x^{(k-1)}, \dots, x^{(k-m+1)}) , \quad (3.2.8)$$

$$k = (0, 1, 2, \dots) ,$$

onde $x^{(k)}$ é a solução aproximada do sistema após k iterações. Isto é:

$$x^{(k)} \rightarrow h , \quad \text{com} \quad h = A^{-1} b ,$$

quando $k \rightarrow \infty$.

Definição 3.2.5 - A iteração é denominada ESTACIONÁRIA se $F_k = F$, para todo k , isto é, F_k é independente de k .

Definição 3.2.6 - A iteração é dita LINEAR se F_k é uma função linear de

$$x^{(k)}, x^{(k-1)}, x^{(k-2)}, \dots, x^{(k-m+1)} .$$

Definição 3.2.7 - Um processo iterativo WITTMAYER é uma iteração LINEAR, não ESTACIONÁRIA, de grau $m = 1$.

PRINCÍPIO GERAL PARA O ESTABELECIMENTO DE MÉTODOS ITERATIVOS PARA RESOLVER SISTEMAS LINEARES

Os processos iterativos para resolver sistemas

de equações lineares podem ser descritos como segue:

seja o sistema

$$A x = b, \quad (3.3.1)$$

onde A é matriz não singular.

Uma seqüência de vetores $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}, x^{(k+1)}$ é construída de acordo com as fórmulas de recorrência

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + C^{(k)} r^{(k)}, \quad (3.3.2)$$

com

$$r^{(k)} = b - A x^{(k)}, \quad (3.3.3)$$

onde $C^{(0)}, C^{(1)}, C^{(2)}, \dots$, é uma certa seqüência de matrizes não singulares e $x^{(0)}$ é uma aproximação inicial geralmente arbitrária.

Seja x^* a solução exata do sistema (3.3.1). Se x^* é considerado aproximação inicial em (3.3.2), então as aproximações seguintes deverão ser também x^* .

Todo processo iterativo no qual x^* é a solução exata do sistema (3.3.1) pode ser representado, também, pelas fórmulas

$$x^{(k+1)} = T^{(k)} x^{(k)} + q^{(k)}, \quad (3.3.4)$$

onde $T^{(k)}$ é uma seqüência de matrizes não singulares e

$q^{(k)}$ é uma seqüência de vetores.

Mostrar-se-á que a (3.3.4) é equivalente à (3.3.2).

De fato, para x^* , como solução exata do sistema (3.3.1), a (3.3.4) pode ser escrita:

$$x^* = T^{(k)} x^* + q^{(k)}. \quad (3.3.5)$$

Subtraindo a (3.3.5) da (3.3.4) resulta:

$$x^{(k+1)} - x^* = T^{(k)} [x^{(k)} - x^*] \dots$$

$$x^{(k+1)} = T^{(k)} [x^{(k)} - x^*] + x^* \dots$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + [T^{(k)} - I] [x^{(k)} - x^*] \dots$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + [I - T^{(k)}] A^{-1} A [x^* - x^{(k)}] \dots$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + C^{(k)} [A x^* - A x^{(k)}] \dots$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + C^{(k)} (b - A x^{(k)}),$$

com

$$C^{(k)} = (I - T^{(k)}) A^{-1}. \quad (3.3.6)$$

Sendo de muito uso, as representações (3.3.2) e (3.3.4) devem ser consideradas de forma tal que o vetor solução $h = A^{-1}b$ permaneça invariante, isto é, se

$$x^{(k)} = A^{-1}b, \text{ então } x^{(k+1)} = A^{-1}b.$$

Conseqüentemente, em (3.3.2) é requerido que $C^{(k)}\lambda^{(k)}=0$ quando $x^{(k)} = A^{-1}b$.

Substituindo $x^{(k)} = x^{(k+1)} = A^{-1}b$ em (3.3.4), vem:

$$A^{-1}b = T^{(k)} A^{-1}b + q^{(k)} \therefore$$

$$q^{(k)} = A^{-1}b - T^{(k)} A^{-1}b.$$

Logo:

$$q^{(k)} = (I - T^{(k)}) A^{-1}b. \quad (3.3.7)$$

O k-ésimo vetor resíduo é dado por $(r^{(k)})$ definido em (3.3.3).

O k-ésimo vetor erro $(e^{(k)})$ é dado por:

$$e^{(k)} = h - x^{(k)}, \quad (3.3.8)$$

onde h é o vetor solução do sistema (3.3.1).

Mostra-se, agora,

$$r^{(k)} = A e^{(k)}. \quad (3.3.9)$$

Substituindo o vetor b da (3.3.1) em (3.3.3) ,
vem:

$$r^{(k)} = Ax - Ax^{(k)} \dots$$

$$r^{(k)} = A(x - x^{(k)}) . \quad \text{Mas } x = h = A^{-1} b ,$$

logo:

$$r^{(k)} = A(h - x^{(k)}) , \text{ pela (3.3.8),}$$

$$r^{(k)} = A e^{(k)} .$$

CONVERGÊNCIA

Uma iteração converge se, e sô se, $\|e^{(k)}\| \rightarrow 0$,
quando $k \rightarrow \infty$.

Pelo fato de h ser desconhecido, é usada ou
tra norma, a norma do vetor resíduo $\|r^{(k)}\|$ ou
 $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|$, que é utilizada em testes de conver
gência.

As fórmulas de recorrência (3.3.2) podem ser
escritas na forma

$$x^{(k+1)} = (I - C^{(k)} A) x^{(k)} + C^{(k)} b \quad (3.4.1)$$

Substituindo as (3.3.6) e (3.3.7) na (3.3.4), vem:

$$x^{(k+1)} = T^{(k)} x^{(k)} + (I - T^{(k)}) A^{-1} b. \quad (3.4.2)$$

As fórmulas (3.3.8) e (3.3.9) são satisfeitas para

$$x^{(k)} = x^{(k+1)} = A^{-1} b. \quad (3.4.3)$$

Substituindo a (3.4.3) na (3.4.1), vem:

$$A^{-1} b = (I - C^{(k)} A) A^{-1} b + C^{(k)} b.$$

Subtraindo $x^{(k+1)}$ nos dois lados da igualdade

$$\begin{aligned} A^{-1} b - x^{(k+1)} &= (I - C^{(k)} A) A^{-1} b + C^{(k)} b - \\ &- (I - C^{(k)} A) x^{(k)} - C^{(k)} b. \end{aligned}$$

$$A^{-1} b - x^{(k+1)} = (I - C^{(k)} A) (A^{-1} b - x^{(k)}).$$

Logo:

$$e^{(k+1)} = (I - C^{(k)} A) e^{(k)}. \quad (3.4.4)$$

Substituindo a (3.4.3) na (3.4.2), vem:

$$A^{-1} b = T^{(k)} A^{-1} b + (I - T^{(k)}) A^{-1} b. \quad (3.4.5)$$

Subtraindo a (3.4.2) da (3.4.5), vem:

$$A^{-1} b - x^{(k+1)} = T^{(k)} A^{-1} b - T^{(k)} x^{(k)}$$

$$e^{(k+1)} = T^{(k)} e^{(k)} \quad (3.4.6)$$

Da (3.4.6), pode-se escrever:

$$e^{(k+1)} = T^{(k)} e^{(k)},$$

$$e^{(k)} = T^{(k-1)} e^{(k-1)},$$

$$e^{(k-1)} = T^{(k-2)} e^{(k-2)},$$

$$e^{(k-2)} = T^{(k-3)} e^{(k-3)},$$

⋮

$$e^{(k-i+1)} = T^{(k-i)} e^{(k-i)},$$

⋮

$$e^{(1)} = T^{(0)} e^{(0)}. \quad (3.4.7)$$

Considerando as igualdades (3.4.7), vem:

$$e^{(k+1)} = T^{(k)} T^{(k-1)} e^{(k-1)},$$

$$e^{(k+1)} = T^{(k)} T^{(k-1)} T^{(k-2)} e^{(k-2)},$$

$$e^{(k+1)} = T^{(k)} T^{(k-1)} T^{(k-2)} T^{(k-3)} e^{(k-3)},$$

⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

$$e^{(k+1)} = T^{(k)} T^{(k-1)} T^{(k-2)} T^{(k-3)} e^{(k-3)} T^{(k-4)} \dots$$

$$\dots T^{(k-i+1)} \dots T^{(1)} T^{(0)} e^{(0)}.$$

Logo:

$$e^{(k+1)} = \left[\prod_{i=0}^k T^{(i)} \right] e^{(0)} = M_{k+1} e^{(0)} \quad (3.4.8)$$

ou

$$e^{(k+1)} = \left[\prod_{i=0}^k (I - C^{(i)} A) \right] e^{(0)} = M_{k+1} e^{(0)}. \quad (3.4.9)$$

As matrizes $T^{(k)}$ e $(I - C^{(k)} A)$ são chamadas matrizes de iteração ou matrizes reduzidas de erro.

A iteração converge se, e só se:

$$M_{k+1} = \prod_{i=0}^k T^{(i)} \rightarrow 0 \quad (3.4.10)$$

ou

$$M_{k+1} = \prod_{i=0}^k (I - C^{(i)} A) \rightarrow 0, \quad (3.4.11)$$

quando $k \rightarrow \infty$.

Se todos os valores característicos de M_{k+1} são menores do que 1, em valor absoluto, então as iterações convergem. |07|

Seja $\lambda(M_k)$ o raio espectral de M_k (isto é: o maior valor característico em módulo de M_k).

Então

$$R(M_k) = -(1/k) \log |\lambda(M_k)| \quad |08| \quad (3.4.12)$$

é definido como a média da velocidade de convergência da iteração para um determinado k .

Da (3.3.9), resulta:

$$e^{(k)} = A^{-1} \mu^{(k)}. \quad (3.4.13)$$

Substituindo a (3.4.13) na (3.4.6), vem:

$$e^{(k+1)} = T^{(k)} A^{-1} \mu^{(k)}. \quad (3.4.14)$$

De (3.3.8)

$$\mu^{(k+1)} = A e^{(k+1)}. \quad (3.4.15)$$

Substituindo a (3.4.14) na (3.4.15), vem:

$$\mu^{(k+1)} = (A T^{(k)} A^{-1}) \mu^{(k)}. \quad (3.4.16)$$

$$\mu^{(k+1)} = A (I - C^{(k)} A) A^{-1} \mu^{(k)}.$$

$$\mu^{(k+1)} = (A - A C^{(k)} A) A^{-1} \mu^{(k)}.$$

$$\mu^{(k+1)} = (A A^{-1} - A C^{(k)} A A^{-1}) \mu^{(k)}.$$

$$\lambda^{(k+1)} = (I - AC^{(k)}) \lambda^{(k)}. \quad (3.4.17)$$

Sabe-se da álgebra linear o seguinte:

TEOREMA 3.4.1

"Os valores característicos de AB são os mesmos de BA".

Então $AC^{(k)}$ e $C^{(k)}A$ tem os mesmos valores característicos. |09|

TEOREMA 3.4.2

"Se A tem um valor característico λ e um vetor característico x, então TAT^{-1} tem um vetor característico Tx e um valor característico λ ". |10|

Pelo teorema (3.4.2), $T^{(k)}$ e $AT^{(k)}A^{-1}$ têm os mesmos valores característicos.

Então, o critério de convergência, ao se comparar (3.4.6) com (3.4.14), $e^{(k)} \rightarrow 0$ e $\lambda^{(k)} \rightarrow 0$, respectivamente, em termos de valores característicos, são os mesmos.

A situação fica um pouco simplificada quando a iteração é estacionária. Neste caso $C^{(k)}$ e $T^{(k)}$ não dependem de K e $T^{(k)}$ e $C^{(k)}$ podem ser escritos, respec

tivamente, $(I - CA)$ e C . $(I - CA)$ e C serão aqui matrizes de iteração.

As fórmulas (3.4.8) e (3.4.9) podem ser escritas:

$$e^{(k+1)} = T^k e^{(0)} = (I - CA)^k e^{(0)}. \quad (3.4.18)$$

Considere-se a iteração linear estacionária de 1ª. ordem:

$$x^{(k+1)} = T x^{(k)} + q \quad (3.4.19)$$

A (3.3.6) aqui pode ser escrita

$$q = (I - T) A^{-1} b. \quad (3.4.20)$$

Sabe-se que $h = A^{-1} b$ é o vetor solução. Substituindo h em (3.4.20), vem:

$$q = (I - T) h.$$

$$h = (I - T)^{-1} q. \quad (3.4.21)$$

Define-se os vetores resíduo:

$$\tilde{r}^{(k)} = q - (I - T) x^{(k)} \quad (3.4.22)$$

e substituindo a (3.4.21) na (3.4.22), resulta:

$$\tilde{h}^{(k)} = (I-T) h - (I-T) x^{(k)} \quad . \quad .$$

$$\tilde{h}^{(k)} = (I-T) (h - x^{(k)}) \quad . \quad (3.4.23)$$

Serão válidas as seguintes relações:

$$\tilde{h}^{(k)} = (I-T) A^{-1} h^{(k)} \quad , \quad (3.4.24)$$

$$\tilde{h}^{(k)} = (I-T) e^{(k)} \quad , \quad (3.4.25)$$

$$\tilde{h}^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)} \quad , \quad (3.4.26)$$

$$\tilde{h}^{(k+1)} = T \tilde{h}^{(k)} \quad (3.4.27)$$

$$\text{e} \quad \tilde{h}^{(k+1)} = T^{k+1} \tilde{h}^{(0)} \quad . \quad (3.4.28)$$

Verificação das fórmulas (3.4.24) - (3.4.28)

1. (3.4.24) e (3.4.25)

Substituindo a (3.3.8) na (3.3.9), vem:

$$h^{(k)} = A(h - x^{(k)}) \quad . \quad .$$

$$h - x^{(k)} = A^{-1} h^{(k)} \quad . \quad (3.4.29)$$

Substituindo a (3.4.29) na (3.4.23), resulta:

$$\tilde{h}^{(k)} = (I-T) A^{-1} h^{(k)} \quad . \quad .$$

e

$$\tilde{h}^{(k)} = (I - T) e^{(k)}.$$

$$2. \quad \tilde{h}^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)} \dots$$

$$\tilde{h}^{(k)} = Tx^{(k)} + q - h + A^{-1} h^{(k)} \dots$$

$$\tilde{h}^{(k)} = Tx^{(k)} + (I - T) h - h + A^{-1} h^{(k)} \dots$$

$$\tilde{h}^{(k)} = T[h - A^{-1} h^{(k)}] + [I - T]h - h + A^{-1} h^{(k)} \dots$$

$$\tilde{h}^{(k)} = Th - TA^{-1} h^{(k)} + Ih - Th - h + A^{-1} h^{(k)} \dots$$

$$\tilde{h}^{(k)} = (I - T) A^{-1} h^{(k)} = (I - T) e^{(k)},$$

que são as (3.4.24) e (3.4.25).

$$3. \quad (3.4.27) \quad \tilde{h}^{(k+1)} = T \tilde{h}^{(k)}$$

Da (3.4.13) e (3.4.25), vem:

$$\tilde{h}^{(k+1)} = T [I - T] A^{-1} \tilde{h}^{(k)} \dots$$

$$\tilde{h}^{(k+1)} = T [I - T] A^{-1} A e^{(k)} \dots$$

$$\tilde{h}^{(k+1)} = T [I - T] A^{-1} A [I - T]^{-1} \tilde{h}^{(k)} \dots$$

$$\tilde{h}^{(k+1)} = T \tilde{h}^{(k)} = T \tilde{h}^{(k)} \dots$$

$$\tilde{h}^{(k+1)} = T \tilde{h}^{(k)}.$$

$$4. \quad (3.4.28) \quad \tilde{h}^{(k+1)} = T^{k+1} \tilde{h}^{(0)}.$$

Da (3.4.27) :

$$\tilde{h}^{(1)} = T \tilde{h}^{(0)},$$

$$\tilde{h}^{(2)} = T \tilde{h}^{(1)} = T T \tilde{h}^{(0)} = T^2 \tilde{h}^{(0)},$$

$$\tilde{h}^{(3)} = T \tilde{h}^{(2)} = T T^2 \tilde{h}^{(0)} = T^3 \tilde{h}^{(0)},$$

(3.4.30)

$$\tilde{h}^{(k)} = T^k \tilde{h}^{(0)}$$

$$e \quad \tilde{h}^{(k+1)} = T^{k+1} \tilde{h}^{(0)}.$$

Da (3.4.26)

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \tilde{h}^{(k)} \dots$$

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \tilde{h}^{(0)},$$

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \tilde{h}^{(1)} = x^{(0)} + \tilde{h}^{(0)} + \tilde{h}^{(1)},$$

$$x^{(3)} = x^{(2)} + \tilde{h}^{(2)} = x^{(0)} + \tilde{h}^{(0)} + \tilde{h}^{(1)} + \tilde{h}^{(2)},$$

$$x^{(4)} = x^{(3)} + \tilde{h}^{(3)} = x^{(0)} + \tilde{h}^{(0)} + \tilde{h}^{(1)} + \tilde{h}^{(2)} + \tilde{h}^{(3)},$$

°

°

°

$$x^{(k+1)} = x^{(0)} + \tilde{h}^{(0)} + \tilde{h}^{(1)} + \tilde{h}^{(2)} + \tilde{h}^{(3)} + \dots + \tilde{h}^{(k)}. \quad (3.4.31)$$

Substituindo as (3.4.30) na (3.4.31), vem:

$$x^{(k+1)} = x^{(0)} + \tilde{h}^{(0)} + T\tilde{h}^{(0)} + T^2\tilde{h}^{(0)} + T^3\tilde{h}^{(0)} + \dots + T^k\tilde{h}^{(0)}$$

$$x^{(k+1)} = x^{(0)} + (I + T + T^2 + T^3 + \dots + T^k) \tilde{h}^{(0)}. \quad (3.4.32)$$

TEOREMA 3.4.3

Seja A uma matriz complexa $n \times n$. Então $A^n \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$, se, e somente se, todos os valores característicos de A , são, em valor absoluto, menores do que 1. [11]

No caso em estudo, que é estacionário, $M_k = T^k = (I - CA)^k \rightarrow 0$ define convergência. De acordo com o teorema (3.4.3) tal convergência ocorre se, e somente se, os valores característicos de T ou de $(I - CA)$ são, em módulo, menores do que 1.

CAPÍTULO IV

MÉTODOS ITERATIVOS PARA A SOLUÇÃO
DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

4.1 MÉTODO DE JACOBI4.1.1 Introdução

Seja o sistema de equações lineares

$$Ax = b, \quad (4.1.1-1)$$

com A matriz não singular $n \times n$.

O método de Jacobi é um método iterativo es
tacionário.

O presente método pode ser expresso pelas fórmulas de recorrência (3.3.2)

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + C^{(k)} r^{(k)}, \quad \text{com}$$

$$C^{(k)} = C = (C_{ij}^{(k)}) = (C_{ij}) = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j; \\ \frac{1}{a_{ij}}, & \text{se } i = j; \end{cases} \quad (4.1.1-2)$$

por ser $C^{(k)}$ independente de k .

O método além de estacionário é linear.

Aqui é necessário que $a_{ij} \neq 0$, para todo $i=1,2,\dots,n$. Se algum $a_{ii} = 0$, mas A é não singular, então, permutando linhas e ou colunas de A , é sempre possível se obter uma matriz não singular C .

Substituindo as (3.3.3) e (4.1.1-2) em (3.3.2), vem:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + C(b - Ax^{(k)}) \quad . \quad .$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + Cb - CAx^{(k)} \quad . \quad .$$

$$x^{(k+1)} = [I - CA] x^{(k)} + Cb \quad (4.1.1-3)$$

Atribuindo às componentes do vetor $x^{(k)}$, da (4.1.1-3), valores aproximados, resultarão valores "melhorados" para as componentes de $x^{(k+1)}$.

A (4.1.1-3), fazendo $k=1,2,\dots$, representa uma fórmula genérica matricial de iteração, exigindo apenas que C seja não singular. Em (4.1.1-3) k indica o estágio de iteração. Assim, $x^{(k+1)}$ representa o vetor solução após $(k+1)$ reiterações.

Sendo o método de Jacobi estacionário, pode-se escrever as fórmulas iterativas (3.3.4) e (3.3.6), respectivamente, como:

$$x^{(k+1)} = T x^{(k)} + q \quad (4.1.1-4)$$

e

$$C = (I - T) A^{-1} \quad (4.1.1-5)$$

Da (4.1.1-5), resulta:

$$CA = (I - T) A^{-1} A \quad . \quad .$$

$$CA = I - T \quad . \quad .$$

$$T = I - CA. \quad (4.1.1-6)$$

Substituindo a (4.1.1-6) na (4.1.1-4), vem:

$$x^{(k+1)} = (I - CA) x^{(k)} + q. \quad (4.1.1-7)$$

Verifica-se, assim, que o método de Jacobi pode ser expresso também pelas fórmulas de recorrência (4.1.1-4), com T dado em (4.1.1-6) e $q = Cb$.

O método consiste em resolver a i-ésima equação do sistema (4.1.1-1) para $x_i^{(k+1)}$, usando os valores $x_j^{(k)}$, $i \neq j$ para as variáveis restantes, isto é:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right] \quad (4.1.1-8)$$

O método iterativo de Jacobi é caracterizado pelo fato de que cada iteração é uma iteração simples. [definição 2.2].

Pode-se obter uma fórmula matricial iterativa equivalente à (4.1.1-3).

A matriz A será expressa como soma de outras três, na forma:

$$A = D + L + U, \quad (4.1.1-9)$$

com

$$D = (a_{ij}) = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j; \\ a_{ij}, & \text{se } i = j; \end{cases} \quad (4.1.1-10)$$

$$L = (a_{ij}) = \begin{cases} 0, & \text{se } i \leq j; \\ a_{ij}, & \text{se } i > j; \end{cases} \quad (4.1.1-11)$$

$$U = (a_{ij}) = \begin{cases} 0, & \text{se } i \geq j; \\ a_{ij}, & \text{se } i < j. \end{cases} \quad (4.1.1-12)$$

Substituindo a (4.1.1-9) em (4.1.1-1), vem:

$$(D + L + U) x = b \quad .^{\circ}.$$

$$D x = -(L + U) x + b \quad .^{\circ}.$$

$$x = -D^{-1}(L + U) x + D^{-1} b. \quad (4.1.1-13)$$

Visando iterações, a (4.1.1-13) pode ser escrita de acordo com a (4.1.1-4):

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(L+U)x^{(k)} + D^{-1}b, \quad (4.1.1-14)$$

com

$$T = -D^{-1} (L + U) \quad (4.1.1-15)$$

e

$$q = D^{-1} b . \quad (4.1.1-16)$$

É desejável ter os elementos diagonais de A tão grande quanto possível em relação aos elementos não diagonais.

Por exemplo, faça-se

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad x^{(1)} = 0 \quad \text{em (4.1.1-14).}$$

Assim, resulta

$x^{(2)} = D^{-1} b$. Se os elementos diagonais são dominantes, $x^{(2)}$ já é uma boa aproximação da solução.

4.1.2 Dedução do algoritmo que caracteriza o método

Podemos chegar às fórmulas (4.1.1-8) que caracterizam o algoritmo do método de Jacobi a partir tanto das fórmulas (4.1.1-3), como das (4.1.1-14), que são equivalentes.

Seja o sistema (4.1.1-1) com

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (4.1.2-1)$$

$$b^T = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \dots b_i \dots b_n \end{bmatrix} \quad (4.1.2-2)$$

$$x^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \dots x_i \dots x_n \end{bmatrix} . \quad (4.1.2.3)$$

De (4.1.1-2), vem:

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_{33}} & 0 \dots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a_{ii}} \dots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix} , \quad (4.1.2-4)$$

$$CA = \begin{bmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{1j}}{a_{11}} \dots \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 1 & \frac{a_{23}}{a_{22}} & \dots & \frac{a_{2j}}{a_{22}} \dots \frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \frac{a_{31}}{a_{33}} & \frac{a_{32}}{a_{33}} & 1 & \dots & \frac{a_{3j}}{a_{33}} \dots \frac{a_{3n}}{a_{33}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{a_{i1}}{a_{ii}} & \frac{a_{i2}}{a_{ii}} & \frac{a_{i3}}{a_{ii}} & \dots 1 \dots & \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \dots \frac{a_{in}}{a_{ii}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \frac{a_{n3}}{a_{nn}} & \dots & \frac{a_{nj}}{a_{nn}} \dots 1 \end{bmatrix} \quad (4.1.2-5)$$

$$I-CA = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1j}}{a_{11}} \dots -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} & \dots & -\frac{a_{2j}}{a_{22}} \dots -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ -\frac{a_{31}}{a_{33}} & -\frac{a_{32}}{a_{33}} & 0 & \dots & -\frac{a_{3j}}{a_{33}} \dots -\frac{a_{3n}}{a_{33}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{a_{i1}}{a_{ii}} & -\frac{a_{i2}}{a_{ii}} & -\frac{a_{i3}}{a_{ii}} & \dots 0 \dots & -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \dots -\frac{a_{in}}{a_{ii}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n3}}{a_{nn}} & \dots & -\frac{a_{nj}}{a_{nn}} \dots 0 \end{bmatrix} \quad (4.1.2-6)$$

$$e \quad [cb]^T = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} & \frac{b_2}{a_{22}} & \frac{b_3}{a_{33}} & \dots & \frac{b_i}{a_{ii}} & \dots & \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}, \quad (4.1.2-7)$$

Substituindo a (4.1.2-5) e (4.1.2-6) nas (4.1.1-3)

vem:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_i^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1j}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} & \dots & -\frac{a_{2j}}{a_{22}} & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ -\frac{a_{31}}{a_{33}} & -\frac{a_{32}}{a_{33}} & 0 & \dots & -\frac{a_{3j}}{a_{33}} & \dots & -\frac{a_{3n}}{a_{33}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{a_{i1}}{a_{ii}} & -\frac{a_{i2}}{a_{ii}} & -\frac{a_{i3}}{a_{ii}} & \dots 0 \dots & -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} & \dots & -\frac{a_{in}}{a_{ii}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n3}}{a_{nn}} & \dots & -\frac{a_{nj}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \\ \vdots \\ x_i^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \frac{b_3}{a_{33}} \\ \vdots \\ \frac{b_i}{a_{ii}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

(4.1.2-8)

Da (4.1.2-8) resulta para a componente i do vetor solução no estágio iterativo $(k+1)$:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)}, \quad (4.1.2-9)$$

com $(i = 1, 2, 3, \dots, n \quad ; \quad k = 0, 1, 2, \dots)$.

A (4.1.2-9) representa o algoritmo do método de Jacobi que confere com a (4.1.1-8).

4.2 MÉTODO DE GAUSS-SEIDEL

Mostra-se que, para o sistema (4.1.1-1), as iterações sucessivas pelo método de Gauss-Seidel são obtidas por:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} \right]. \quad (4.2.1)$$

Substituindo a (4.1.1-9) na (4.1.1-1), vem:

$$(D + L + U) x = b \quad (4.2.2)$$

ou

$$(D + L) x + Ux = b. \quad (4.2.3)$$

Visando iterações, a (4.2.3) é escrita como:

$$(D + L) x^{(k+1)} + U x^{(k)} = b \quad (4.2.4)$$

ou

$$x^{(k+1)} = -(D+L)^{-1} U x^{(k)} + (D+L)^{-1} b. \quad (4.2.5)$$

Desenvolvendo a (4.2.4), resulta:

$$D x^{(k+1)} + L x^{(k+1)} + U x^{(k)} = b \quad . \quad .$$

$$D x^{(k+1)} = b - U x^{(k)} - L x^{(k+1)} \quad . \quad .$$

$$x^{(k+1)} = D^{-1} b - D^{-1} U x^{(k)} - D^{-1} L x^{(k+1)} \quad . \quad (4.2.6)$$

A (4.2.6) constitui a fórmula iterativa de Gauss-Seidel na forma matricial.

Da (4.1.1-10), vem:

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{ii} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad (4.2.7)$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{i,i-1} & 0 \dots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.2.8)$$

$$U = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{i,i+1} & \dots & a_{in} \\ 0 & 0 & \dots & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.2.9)$$

$$D^{-1}U = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{ij}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 0 & \frac{a_{23}}{a_{22}} & \frac{a_{24}}{a_{22}} & \dots & \frac{a_{2j}}{a_{22}} & \dots & \frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 \frac{a_{i,i+1}}{a_{ii}} & \dots & \frac{a_{ij}}{a_{ii}} & \dots & \frac{a_{in}}{a_{ii}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.2.10)$$

$$D^{-1}_L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & & & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & 0 & \dots & & 0 \\ \frac{a_{31}}{a_{33}} & \frac{a_{32}}{a_{33}} & 0 & \dots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{a_{i1}}{a_{ii}} & \frac{a_{i2}}{a_{ii}} & \frac{a_{i3}}{a_{ii}} & \dots & \frac{a_{ij}}{a_{ii}} & \dots & \frac{a_{i,i-1}}{a_{ii}} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \frac{a_{n3}}{a_{nn}} & \dots & \frac{a_{nj}}{a_{nn}} & \dots & \frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.2.11)$$

$$[D^{-1}b]^T = \left[\frac{b_1}{a_{11}} \quad \frac{b_2}{a_{22}} \quad \frac{b_3}{a_{33}} \quad \dots \quad \frac{b_i}{a_{ii}} \quad \dots \quad \frac{b_n}{a_{nn}} \right] \cdot \quad (4.2.12)$$

Substituindo as (4.2.10), (4.2.11) e (4.2.12) na (4.2.6), vem:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_i^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \frac{b_3}{a_{33}} \\ \vdots \\ \frac{b_i}{a_{ii}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 0 & \frac{a_{23}}{a_{22}} & \dots & \frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a_{34}}{a_{33}} & \dots & \frac{a_{3n}}{a_{33}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a_{i,i+1}}{a_{ii}} & \dots & \frac{a_{in}}{a_{ii}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \\ \vdots \\ x_i^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{a_{31}}{a_{33}} & \frac{a_{32}}{a_{33}} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{a_{i1}}{a_{ii}} & \frac{a_{i2}}{a_{ii}} & \frac{a_{i3}}{a_{ii}} & \dots & \frac{a_{i,i-1}}{a_{ii}} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \frac{a_{n3}}{a_{nn}} & \dots & \frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_i^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{bmatrix}$$

(4.2.13)

Da representação matricial acima, resulta para a componente i do vetor solução no estágio $(k+1)$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k+1)}, \quad (4.2.14)$$

que coincide com a (4.2.1).

Uma análise cuidadosa das fórmulas (4.2.14) nos permite concluir que, no método de Gauss-Seidel, cada componente $x_i^{(k+1)}$ é calculada na i -ésima equação de (4.1.1-1), usando as componentes

$$x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_{i-1}^{(k+1)}, x_{i+1}^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}.$$

Por exemplo: para o cálculo de $x_1^{(1)}$, usa-se os valores iniciais $x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$; para o cálculo de $x_2^{(1)}$ usa-se $x_1^{(1)}, x_3^{(0)}, x_4^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$; para o cálculo de $x_3^{(1)}$ usa-se $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_4^{(1)}, \dots, x_n^{(0)}$. Isto é: assim que uma aproximação de uma incógnita é calculada, será aproveitada no cálculo da incógnita seguinte até atingir o fim do estágio iterativo. Por esta razão o método de Gauss-Seidel é algumas vezes denominado método dos DESVIOS SIMULTÂNEOS. [12]

MÉTODO S.O.R. (SUCCESSIVE-OVER-RELAXATION)

(SOBRE-RELAXAÇÃO)

Pode-se dizer que o método S.O.R. é o método de "Gauss-Seidel extrapolado". Isto é: o método de Gauss-Seidel acelerado através de um fator W.

O S.O.R. é definido por

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + W \left[\frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} - x_i^{(k)} \right] \quad (4.3.1)$$

ou

$$x_i^{(k+1)} = (1 - W) x_i^{(k)} + W \left[\frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} \right]. \quad (4.3.2)$$

No caso $W = 1$ a sobre-relaxação se reduz ao método iterativo de Gauss-Seidel.

Ostrowski (1954) mostrou que, para o método S.O.R., ocorre convergência em um sistema de equações lineares onde a matriz dos coeficientes é definida positiva, (tal como nas equações normais geodésicas) para

$$0 < W < 2.$$

Por motivo das dificuldades para se obter o melhor fator de relaxação W , o método S.O.R., na prática, não é muito desejável. A determinação do melhor fator de relaxação se restringe às matrizes de Young ou matrizes dotadas da "propriedade A". [13]

Matrizes com "propriedade A" não ocorrem no ajustamento de triangulações, trilaterações e poligonais; mas podem ocorrer nos circuitos gravimétricos ou de nivelamento. O cálculo do melhor fator W envolve o conhecimento dos valores característicos da matriz dos coeficientes do sistema linear, além de exigir que a matriz dos coeficientes seja de "propriedade A". [14] Pode-se também obter o melhor fator W por meio de um método empírico aplicado às matrizes dos coeficientes dotados ou não de "propriedade A". [15]

MÉTODO ITERATIVO DOS GRADIENTES CONJUGADOS

Introdução

O método dos Gradientes Conjugados (CG-MÉTODO) foi desenvolvido independentemente por E. Stiefel e M.R. Hestenes em 1952. Seu algoritmo básico, que se en

contra em várias publicações é bom para sistemas bem condicionados.

Uma tentativa aqui será feita para deduzir o método dos Gradientes Conjugados e juntamente apresentar o seu algoritmo, porque tal método está bastante diversificado na literatura matemática.

Seja

$$Nx = u \quad (4.4.1-1)$$

um sistema linear de equações algébricas, onde N é uma matriz simétrica e definida positiva de dimensão $n \times n$; x um vetor $n \times 1$ (vetor das incógnitas) e u um vetor $n \times 1$, dos termos independentes. Nestas condições o método dos Gradientes Conjugados, que é um método de relaxação não estacionário, teoricamente resolve o sistema (4.4.1-1) em n passos iterativos.

Se A for uma matriz $m \times n$ (matriz dos coeficientes das equações de observação no método paramétrico), sabe-se do ajustamento de observações que as linhas de A formam vetores independentes. Assim, a matriz quadrada $A^T A = N$ é simétrica e definida positiva. Então o sistema (4.4.1-1), conhecido na literatura geodésica como Sistema de Equações Normais, tem solução única.

Para a dedução deste método, a matriz N das e-

quações (4.4.1-1) será considerada simétrica e definida positiva e posteriormente o algoritmo será modificado para uma matriz arbitrária M que permitirá o uso direto das equações de observação sem explicitar a formação das equações normais.

Método básico de relaxação

Para obter-se a solução de (4.4.1-1) pelo método de relaxação, será usado em (4.4.1-1), no lugar de x , um vetor inicial $x^{(0)}$, o que fornece um vetor resíduo $r^{(0)}$, dado por:

$$r^{(0)} = N x^{(0)} + u. \quad (4.4.2-1)$$

O objetivo dos métodos de relaxação é o de substituir o vetor inicial $x^{(0)}$ até que se anule o vetor resíduo $r^{(0)}$. Este vetor resíduo $r^{(0)}$ é o gradiente da função quadrática $F[x^{(0)}]$, dada por:

$$F[x^{(0)}] = \frac{1}{2} x^{(0)T} N x^{(0)} + u^T x^{(0)}. \quad (4.4.2-2)$$

Derivando parcialmente a função quadrática $F[x^{(0)}]$ em relação ao vetor inicial $x^{(0)}$, obtem-se:

$$\frac{\partial F x^{(0)}}{\partial x^{(0)}} = \frac{1}{2} 2N x^{(0)} + u = N x^{(0)} + u. \quad |16| \quad (4.4.2-3)$$

As (4.4.2-2) e (4.4.2-3) dão:

$$r^{(0)} = \text{grad } F \left[x^{(0)} \right] = N x^{(0)} + u . \quad (4.4.2-4)$$

A equação (4.4.2-4) indica que a solução de (4.4.1-1) é similar ao problema de encontrar o único ponto crítico da função quadrática $F \left[x^{(0)} \right]$, dada por (4.4.2-3), e este ponto crítico é mínimo pelo fato de N ser definida positiva. |17|

Seja h um vetor direcional de relaxação não-nulo, escolhido arbitrariamente, para o qual o vetor $x^{(0)}$, na direção de h , executa um mínimo da função quadrática $F \left[x^{(0)} \right]$, resultando um novo vetor x' (inicial), o qual é uma função linear do vetor inicial anterior $x^{(0)}$, dado por:

$$x' = x^{(0)} + \Delta x^{(0)} = x^{(0)} + \lambda h , \quad (4.4.2-5)$$

onde λ é o fator distância de relaxação ou o fator correção para o vetor incôgnita, o qual é determinado de tal forma que a função quadrática $F \left[(x') \right]$ seja um mínimo.

$F \left[(x') \right]$ é considerada uma função quadrática com somente uma variável (λ) e com constantes (fixas), $x^{(0)}$ e h .

Assim:

$$F[(x')] = F[x^{(0)} + \lambda h]$$

Usando a (4.4.2-2), vem:

$$F[(x')] = \frac{1}{2} [x^{(0)} + \lambda h]^T N [x^{(0)} + \lambda h] + u^T [x^{(0)} + \lambda h] \dots$$

$$F[(x')] = \frac{1}{2} [x^{(0)T} + (\lambda h)^T] N [x^{(0)} + \lambda h] + u^T [x^{(0)} + \lambda h] \dots$$

$$F[(x')] = \frac{1}{2} [x^{(0)T} N x^{(0)}] + \frac{1}{2} \lambda x^{(0)T} N h + \frac{1}{2} \lambda x^{(0)T} N h +$$

$$+ \frac{1}{2} \lambda^2 h^T N h + u^T x^{(0)} + \lambda u^T h \dots$$

$$F[(x')] = \frac{1}{2} x^{(0)T} N x^{(0)} + \lambda x^{(0)T} N h + \frac{1}{2} \lambda^2 h^T N h +$$

$$+ u^T x^{(0)} + \lambda u^T h,$$

mas:

$$\frac{1}{2} x^{(0)T} N x^{(0)} + u^T x^{(0)} = F[x^{(0)}]$$

e

$$\lambda x^{(0)T} N h + \lambda u^T h = \lambda [x^{(0)T} N h + u^T h] =$$

$$= \lambda [x^{(0)T} N + u^T] h = \lambda [N x^{(0)} + u]^T h = \lambda r^{(0)T} h;$$

assim:

$$F[(x')] = F[(x^{(0)})] + \lambda r^{(0)T} h + \frac{1}{2} \lambda^2 h^T N h. \quad (4.4.2-6)$$

Derivando $F[(x')]$ em relação à única variável λ e igualando a derivada a zero, encontramos o ponto crítico de $F[(x')]$:

$$\frac{d F[(x')]}{d \lambda} = r^{(0)T} h + \frac{1}{2} 2 \lambda h^T N h \dots$$

$$\frac{d F[(x')]}{d \lambda} = r^{(0)T} h + \lambda h^T N h \dots \quad (4.4.2-7)$$

$$\frac{d F[(x')]}{d \lambda} = 0 \rightarrow r^{(0)T} h + \lambda h^T N h = 0 \dots$$

$$\lambda = - \frac{r^{(0)T} h}{h^T N h}. \quad (4.4.2-8)$$

Análise do ponto crítico

Obtem-se a derivada de segunda ordem de $F[(x')]$ a partir de (4.4.2-7), isto é:

$$\frac{d^2 F[(x')]}{d \lambda^2} = h^T N h. \quad (4.4.2-9)$$

Como N é definida positiva, $h^T N h > 0$ para todo h não-nulo. |18|

Por conseguinte, na direção de relaxação h , com o fator de correção dado por (4.4.2-8), é obtido um mínimo da função quadrática $F[(x')]$. Assim, a (4.4.2-8) pode ser escrita:

$$\lambda = \lambda_{\text{mínimo}} = - \frac{r^{(0)T} h}{h^T N h} . \quad (4.4.2-10)$$

A (4.4.2-10) mostra que no caso $\lambda_{\text{mínimo}} = 0$, a direção do vetor h pode ser escolhida ortogonalmente ao vetor resíduo $r^{(0)}$.

Pode ser provado que o novo vetor

$$r' = Nx' + u \quad (4.4.2-11)$$

deve ser ortogonal ao último vetor direção de relaxação h ; em outras palavras: após cada passo de relaxação, o novo vetor $r^{(j)}$ deve ser ortogonal ao último vetor direcional de relaxação $h^{(j-1)}$.

PROVA:

Usando as (4.4.2-4); (4.4.2-5) e (4.4.2-11), vem:

$$r' = Nx' + u \quad . \quad .$$

$$r' = N \left[x^{(0)} + \lambda h \right] + u \quad . \quad .$$

$$r' = N x^{(0)} + u + \lambda N h \quad . \quad .$$

$$r' = r^{(0)} + \lambda N h \quad (4.4.2-12)$$

Deve-se mostrar que:

$$r'^T h = 0, \text{ onde:}$$

$$r'^T h = [r^{(0)} + \lambda N h]^T h = r^{(0)T} h + \lambda (N h)^T h. \quad (4.4.2-13)$$

Substituindo a (4.4.2-10) na (4.4.2-13), vem:

$$r'^T h = r^{(0)T} h - \frac{r^{(0)T} h h^T N h}{h^T N h} \dots$$

$$r'^T h = r^{(0)T} h - r^{(0)T} h = 0 \quad \text{ou}$$

$$r'^T h = 0. \quad (4.4.2-14)$$

Como ficou provado, o novo vetor resíduo r' é sempre ortogonal ao último vetor direção h ; considera-se tal fato como condição de ortogonalidade.

As equações (4.4.2-13) e (4.4.2-14) podem fornecer o fator distância de relaxação $\lambda_{\text{mínimo}}$,

$$r'^T h = [r^{(0)} + \lambda N h]^T h = r^{(0)T} h + \lambda h^T N h = 0 \dots$$

$$\lambda_{\text{mín}} = - \frac{r^{(0)T} h}{h^T N h}, \text{ a qual coincide com a (4.4.2-10).}$$

Seja ΔF o decréscimo da função $F[x^{(0)}]$ indo de $x^{(0)}$ para x' na direção de relaxação h , supondo $\lambda = \lambda_{\min}$.

Considere-se (4.4.2-2) e (4.4.2-6). Seja ΔF da do por:

$$\Delta F = F[x^{(0)}] - F[x'] \dots$$

$$\Delta F = \frac{1}{2} x^{(0)T} N x^{(0)} + u^T x^{(0)} - \frac{1}{2} x^{(0)T} N x^{(0)} - u^T x^{(0)} -$$

$$- \lambda r^{(0)T} h - \frac{1}{2} \lambda^2 h^T N h \dots$$

$$\Delta F = - \left[\lambda r^{(0)T} h + \frac{1}{2} \lambda^2 h^T N h \right].$$

Mas $\lambda = - \frac{r^{(0)T} h}{h^T N h}$, assim:

$$\Delta F = - \left[\frac{-(r^{(0)T} h)^2}{h^T N h} + \frac{1}{2} \frac{(r^{(0)T} h)^2}{(h^T N h)^2} h^T N h \right] \dots$$

$$\Delta F = - \left[\frac{-2(r^{(0)T} h)^2 + (r^{(0)T} h)^2}{2 h^T N h} \right] \dots$$

$$\Delta F = \frac{1}{2} \frac{(r^{(0)T} h)^2}{h^T N h} > 0, \quad (4.4.2-15)$$

para $r^{(0)T} h \neq 0$.

A (4.4.2-15) fornece o maior decréscimo de $F[(x^{(0)})]$ na direção h .

Assim, para cada passo de relaxação, a forma quadrática $F[x']$ decresce, o qual prova a convergência característica do método de relaxação.

4.4.3 Interpretação geométrica

Geometricamente, o método de relaxação pode ser interpretado como segue:

A função quadrática $F[(x^{(0)})]$, no caso $n = 2$, pode ser representada por suas linhas de nível $F[x^{(0)}] = \text{constante}$, as quais são elipses concêntricas no sistema de coordenadas retangulares (x_1, x_2) ; o centro comum destas elipses concêntricas coincide com o ponto mínimo de $F[(x^{(0)})]$, cujas coordenadas são (\bar{x}_1, \bar{x}_2) , as quais representam a solução do sistema. No caso $n = 2$, o sistema é de duas equações a duas incógnitas.

Seja $x^{(0)}$ o ponto inicial. No caso da solução do sistema, $x^{(0)}$ é o valor inicial.

De acordo com a (4.4.2-4), o correspondente vetor resíduo $r^{(0)}$ será ortogonal à linha de nível passando por $x^{(0)}$, porque o gradiente de uma função, num ponto, é ortogonal à curva de nível que contém este

ponto.

Um primeiro passo na relaxação é escolher o vetor de direção de relaxação h e então proceder na direção de h até x' , onde a função quadrática ao longo da direção de relaxação é mínima. Este ponto x' está sobre a linha de nível, onde x' é o ponto de tangência do vetor h . O novo vetor r' será ortogonal à linha de nível e ao vetor direção de relaxação h em x' de acordo com (4.4.2-14). (ver figura da página 108)

Baseados no método básico de relaxação descrito, alguns métodos diferentes têm sido desenvolvidos, os quais diferem na escolha do vetor direção de relaxação h e no fator distância λ .

Método dos gradientes conjugados

Baseados no método de relaxação apresentado nos tópicos anteriores, métodos gradientes foram desenvolvidos onde o vetor direção de relaxação h não é escolhido arbitrariamente, mas, é uma função dos vetores resíduos.

Como vimos na interpretação geométrica de métodos básicos de relaxação, para achar um mínimo da função quadrática $F[(x^{(0)})]$ o caminho mais rápido é proceder ortogonalmente a partir de $x^{(0)}$ na direção h o-

posta ao grad F , isto é: oposta ao vetor resíduo $r^{(0)}$ (porque o grad F aponta na direção onde a função cresce mais rapidamente). Isto pode ser formulado matematicamente por:

$$h^{(j)} = - r^{(j-1)}. \quad (4.4.4-1)$$

Equações do tipo (4.4.4-1) constituem o princípio do método denominado por "PASSOS DESCENDENTES", conhecido na literatura por "STEEPEST DESCENT". [19]

Apesar do decréscimo na função quadrática em cada passo na relaxação ser máximo localmente, a convergência em geral não é boa. [20]

Para melhorar a convergência, foi desenvolvido, independentemente por STIEFEL e HESTENES, um método, chamado "MÉTODO DOS GRADIENTES CONJUGADOS".

Neste método não é apenas utilizado o vetor resíduo $r^{(j-1)}$, mas também os resultados da iteração anterior. O sistema teoricamente admite a solução em n passos; isto é: converge em n passos finitos. Por esta razão tal método é também denominado "MÉTODO n -PASSOS", n sendo o número de equações e incógnitas.

O método dos gradientes conjugados é uma modificação do método de "PASSOS DESCENDENTES", onde o vetor direção de relaxação $h^{(j)}$ é determinado isoladamente pelo vetor resíduo $r^{(j-1)}$, de acordo com a equa

ção (4.4.4-1).

No método dos gradientes conjugados a equação (4.4.4-1) é válida somente para a primeira relaxação, mas as direções de relaxação ulteriores são calculadas por:

$$h^{(j)} = -r^{(j-1)} + E_{j-1} \cdot h^{(j-1)},$$

para $j \geq 2$,

$$h^{(j)} = -r^{(j-1)},$$

para $j = 1$,

(4.4.4-2)

onde E_{j-1} é um fator de correção para o vetor direção de relaxação, o qual é proporcional ao último vetor de relaxação $h^{(j-1)}$.

O fator E_{j-1} é determinado de tal forma que os vetores $h^{(j)}$ e $h^{(j-1)}$ sejam conjugados, isto é:

$$h^{(j)T} N h^{(j-1)} = 0 \quad (4.4.4-3)$$

Procede daí a denominação "MÉTODO DOS GRADIENTES CONJUGADOS".

Substituindo a (4.4.4-2) na (4.4.4-3), vem:

$$\left[-r^{(j-1)} + E_{j-1} h^{(j-1)} \right]^T N h^{(j-1)} = 0 \quad \therefore$$

$$\left[-r^{(j-1)T} + E_{j-1} h^{(j-1)T} \right] N h^{(j-1)} = 0 \quad \therefore$$

$$-r^{(j-1)T} N h^{(j-1)} + E_{j-1} h^{(j-1)T} N h^{(j-1)} = 0 \quad \therefore$$

$$E_{j-1} = \frac{r^{(j-1)T} N h^{(j-1)}}{h^{(j-1)T} N h^{(j-1)}} \quad (4.4.4-4)$$

Adaptando a (4.4.2-10) para o fator λ_j de distância de relaxação, tem-se:

$$\lambda_j = - \frac{r^{(j-1)T} h^{(j)}}{h^{(j)T} N h^{(j)}} \quad (4.4.4-5)$$

Adaptando a fórmula (4.4.2-5) para o vetor $x^{(j)}$, vem:

$$x^{(j)} = x^{(j-1)} + \lambda_j h^{(j)} \quad (4.4.4-6)$$

Pela (4.4.2-1) o vetor resíduo $r^{(j)}$ é dado por

$$r^{(j)} = N x^{(j)} + u \quad (4.4.4-7)$$

Substituindo a (4.4.4-6) na (4.4.4-7), vem:

$$\kappa^{(j)} = N \left[x^{(j-1)} + \lambda_j h^{(j)} \right] + u \quad .^{\circ}.$$

$$\kappa^{(j)} = N x^{(j-1)} + u + \lambda_j N h^{(j)} \quad .^{\circ}.$$

$$\kappa^{(j)} = \kappa^{(j-1)} + \lambda_j N h^{(j)} = N x^{(j)} + u. \quad (4.4.4-8)$$

O método dos gradientes conjugados é definido pelas equações (4.4.2-4), (4.4.4-1), (4.4.4-2), (4.4.4-3), (4.4.4-4), (4.4.4-5), (4.4.4-6), (4.4.4-7), (4.4.4-8), após ter sido feita a escolha de um vetor inicial, geralmente arbitrário.

RESUMO DO MÉTODO-ALGORITMO

1. $Nx + u = 0$ (sistema $n \times n$) a ser resolvido;

2. $x^{(0)} = 0$ (valores iniciais: arbitrários);

3. $\kappa^{(0)} = Nx^{(0)} + u$;

4. $h^{(j)} = \begin{cases} -\kappa^{(j-1)} & \text{para } j=1 \quad \text{ou} \quad h^{(1)} = -\kappa^{(0)}; \\ -\kappa^{(j-1)} + E_{j-1} h^{(j-1)} & \text{para } j \geq 2; \end{cases}$

5. $E_{j-1} = \frac{\kappa^{(j-1)T} N h^{(j-1)}}{h^{(j-1)T} N h^{(j-1)}};$

$$6. \lambda_j = - \frac{h^{(j-1)T} h^{(j)}}{h^{(j)T} N h^{(j)}} ;$$

$$7. h^{(j)} = h^{(j-1)} + \lambda_j N h^{(j)} ; e$$

$$8. x^{(j)} = x^{(j-1)} + \lambda_j h^{(j)} .$$

Adotando para o algoritmo, a notação usual do presente trabalho, tem-se:

$$1. A x + B = 0 ;$$

$$2. x^{(0)} = 0 ;$$

$$3. R^{(0)} = A x^{(0)} + B ;$$

$$4. H^{(1)} = -R^{(0)} , \quad \text{para } k=0 ;$$

$$5. H^{(k+1)} = -R^{(k)} + E_k H^{(k)} , \quad \text{para } k \geq 1 ;$$

$$6. \lambda_{k+1} = - \frac{R^{(k)T} H^{(k+1)}}{H^{(k+1)T} A H^{(k+1)}} ;$$

$$7. E_k = \frac{R^{(k)T} A H^{(k)}}{H^{(k)T} A H^{(k)}} ;$$

$$8. \quad x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda_{k+1} H^{(k+1)}; e$$

$$9. \quad R^{(k+1)} = R^{(k)} + \lambda_{k+1} A H^{(k+1)}.$$

Procedendo de forma análoga para obter a equação (4.4.2-14), pode-se provar que:

$$h^{(j)T} h^{(j)} = 0. \quad (4.4.4-9)$$

Similarmente, pode ser provado que

$$h^{(j)T} h^{(j-1)} = 0. \quad (4.4.4-10)$$

Usando (4.4.4-2), (4.4.4-8) e (4.4.4-9) obtem-se:

$$h^{(j)T} h^{(j-1)} = h^{(j)T} (-h^{(j)} + E_{j-1} h^{(j-1)}) \dots$$

$$h^{(j)T} h^{(j-1)} = -h^{(j)T} h^{(j)} + E_{j-1} h^{(j)T} h^{(j-1)} = 0.$$

(4.4.4-11)

As equações (4.4.4-3) e (4.4.4-9) podem ser generalizadas da seguinte forma, usando indução: | 21 |

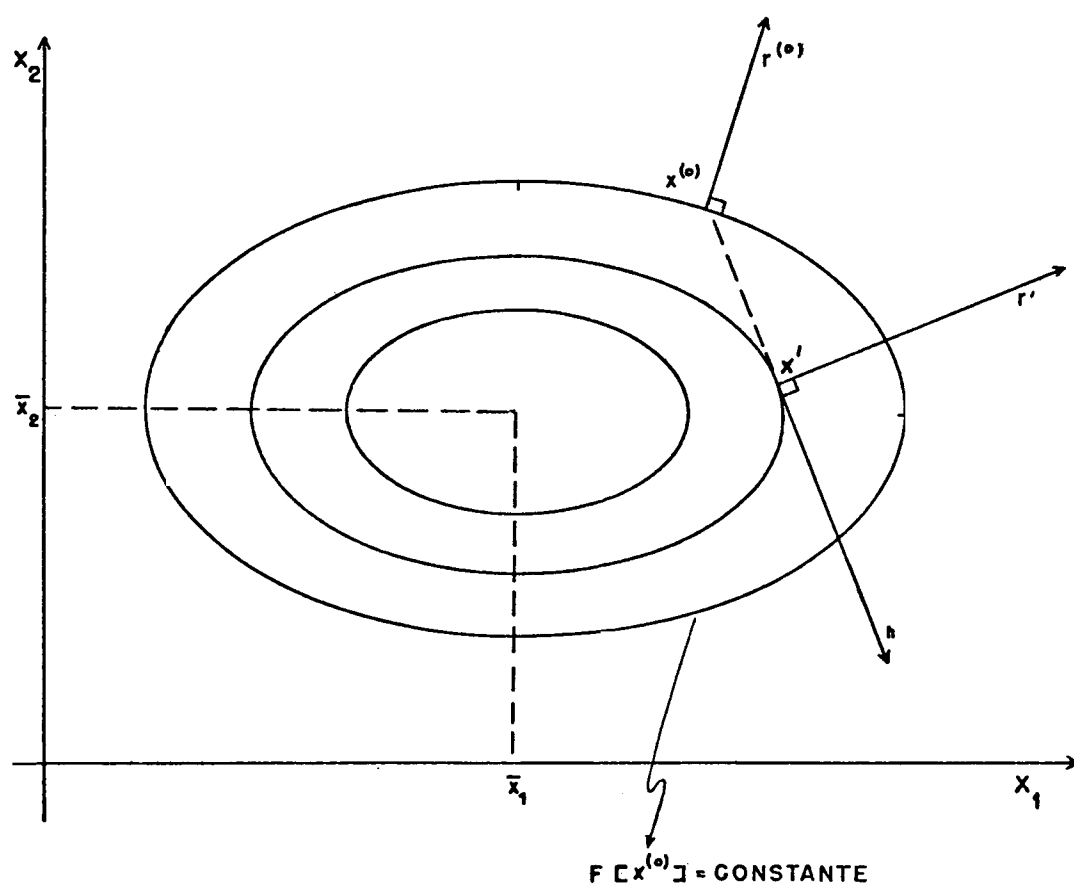
$$h^{(i)T} N h^{(j)} = 0, \text{ para } i \neq j; \quad (4.4.4-12)$$

$$\text{e } \quad \kappa^{(i)T} \kappa^{(j)} = 0, \quad \text{para } i \neq j. \quad (4.4.4-13)$$

Pelas equações (4.4.4-12) e (4.4.4-13) pode-se concluir que no método dos gradientes conjugados, os vetores resíduos $\kappa^{(j)}$ constituem um sistema mutuamente ortogonal e os vetores direção de relaxação $h^{(j)}$, um sistema mutuamente conjugado. Isto nos fornece uma importante característica do Método dos Gradientes Conjugados. Como os vetores resíduos $\kappa^{(j)}$ constituem um sistema mutuamente ortogonal, em um espaço vetorial n -dimensional, este sistema ortogonal pode conter, no máximo, n vetores não-nulos.

Assim, para o $(n+1)$ -ésimo vetor resíduo, $\kappa^{(n)}$ deve anular-se: $\kappa^{(n)} = 0$. Isto prova que o método dos gradientes conjugados fornece TEORICAMENTE a solução em um número máximo de n iterações. Cálculos numéricos, entretanto, podem não apresentar a solução verdadeira em n iterações. Este fato pode ser inerente de erros de arredondamento, mau condicionamento da matriz N e, também, do efeito da mútua ortogonalidade dos vetores resíduos. Isto não perturba a solução do sistema. Neste caso, mais do que n iterações são necessárias para obter a solução e a função quadrática decresce após cada iteração.

FIGURA 1



4.4.5 Algoritmo simplificado do método dos gradientes conjugados

As equações (4.4.4-4) e (4.4.4-5) podem ser escritas numa forma mais cômoda.

Substituindo no numerador da (4.4.4-5) $h^{(j)}$ dado por (4.4.4-2), vem:

$$-\kappa^{(j-1)T} h^{(j)} = -\kappa^{(j-1)T} \left[-\kappa^{(j-1)} + E_{j-1} \cdot h^{(j-1)} \right] \therefore$$

$$-\kappa^{(j-1)T} h^{(j)} = \kappa^{(j-1)T} \kappa^{(j-1)} - E_{j-1} \kappa^{(j-1)T} h^{(j-1)};$$

(4.4.5-1)

mas por (4.4.4-9):

$$\kappa^{(j-1)T} h^{(j-1)} = 0 ; \quad (4.4.5-2)$$

assim:

$$-\kappa^{(j-1)T} h^{(j)} = \kappa^{(j-1)T} \kappa^{(j-1)} . \quad (4.4.5-3)$$

Então, a (4.4.4-5) pode ser escrita:

$$\lambda_j = \frac{\kappa(j-1)^T \kappa(j-1)}{h(j)^T N h(j)}. \quad (4.4.5-4)$$

Pela (4.4.4-8):

$$N h(j-1) = \frac{1}{\lambda_{j-1}} [\kappa(j-1) - \kappa(j-2)]. \quad (4.4.5-5)$$

Substituindo no numerador da (4.4.4-4) $N h(j-1)$ dado por (4.4.5-5), vem:

$$\kappa(j-1)^T N h(j-1) = \frac{\kappa(j-1)^T}{\lambda_{j-1}} [\kappa(j-1) - \kappa(j-2)] \dots$$

$$\kappa(j-1)^T N h(j-1) = \frac{1}{\lambda_{j-1}} [\kappa(j-1)^T \kappa(j-1) - \kappa(j-1)^T \kappa(j-2)].$$

Mas, por (4.4.4-13):

$$\kappa(j-1)^T \kappa(j-2) = 0$$

$$e \quad \kappa(j-1)^T N h(j-1) = \frac{\kappa(j-1)^T \kappa(j-1)}{\lambda_{j-1}}. \quad (4.4.5-6)$$

Substituindo a (4.4.5-6) na (4.4.4-4), vem:

$$E_{j-1} = \frac{\frac{\kappa(j-1)^T \kappa(j-1)}{\lambda_{j-1}}}{h(j-1)^T N h(j-1)} \dots$$

$$E_{j-1} = \frac{\kappa(j-1)^T \kappa(j-1)}{\lambda_{j-1} \left[h(j-1)^T N h(j-1) \right]} . \quad (4.4.5-7)$$

Da (4.4.4-4) :

$$\lambda_{j-1} = \frac{\kappa(j-2)^T \kappa(j-2)}{h(j-1)^T N h(j-1)} . \quad (4.4.5-8)$$

Substituindo a (4.4.5-8) na (4.4.5-7) :

$$E_{j-1} = \frac{\kappa(j-1)^T \kappa(j-1)}{\frac{\kappa(j-2)^T \kappa(j-2)}{h(j-1)^T N h(j-1)} \left[h(j-1)^T N h(j-1) \right]} \dots$$

$$E_{j-1} = \frac{\kappa(j-1)^T \kappa(j-1)}{\kappa(j-2)^T \kappa(j-2)} , \text{ com } j \geq 2 . \quad (4.4.5-9)$$

As equações (4.4.4-4) e (4.4.4-5) equivalem, matematicamente, às equações (4.4.5-4) e (4.4.5-9). Aplicando os conjuntos de equações (4.4.4-4) e (4.4.4-5) ou (4.4.5-4) e (4.4.5-9) para a solução prática de um sistema bem condicionado, o resultado encontrado será bom para os dois conjuntos indiferentemente. Entretanto; no caso de sistemas mal condicionados, as equações (4.4.4-4) e (4.4.4-5) apresentam melhores resultados |22|.

Conseqüentemente, é preferível usar as equações (4.4.4-4) e (4.4.4-5). Devido à simplicidade das equações (4.4.5-4) e (4.4.5-9), estas são as equações usualmente encontradas em muitas publicações.

ALGORITMO SIMPLIFICADO

$$1. \quad Nx + u = 0 ;$$

$$2. \quad x^{(0)} = 0 ;$$

$$3. \quad \lambda^{(0)} = Nx^{(0)} + u ;$$

$$4. \quad h^{(j)} = \begin{cases} -\lambda^{(j-1)}, & \text{para } j = 1 \text{ ou } h^{(1)} = -\lambda^{(0)} ; \\ -\lambda^{(j-1)} + E_{j-1} \cdot h^{(j-1)}, & \text{para } j \geq 2 ; \end{cases}$$

$$5. \quad E_{j-1} = \frac{\lambda^{(j-1)T} \lambda^{(j-1)}}{\lambda^{(j-2)T} \lambda^{(j-2)}} , \quad \text{para } j \geq 2 ;$$

$$6. \quad \lambda_j = \frac{r^{(j-1)T} r^{(j-1)}}{h^{(j)T} N h^{(j)}} ;$$

$$7. \quad x^{(j)} = x^{(j-1)} + \lambda_j h^{(j)} ;$$

$$8. \quad r^{(j)} = r^{(j-1)} + \lambda_j N h^{(j)} .$$

Mudando o algoritmo para a notação usual do presente trabalho, tem-se:

$$1. \quad Ax + B = 0 ;$$

$$2. \quad x^{(0)} = 0 ;$$

$$3. \quad R^{(0)} = Ax^{(0)} + B ;$$

$$4. \quad H^{(k+1)} = \begin{cases} -R^{(0)} , & \text{para } k=0 ; \\ -R^{(k)} + E_k H^{(k)} , & \text{para } k \geq 1 ; \end{cases}$$

$$5. \quad E_k = \frac{R^{(k+1)T} R^{(k+1)}}{R^{(k)T} R^{(k)}} , \quad \text{para } k \geq 1 ;$$

$$6. \quad \lambda_{k+1} = \frac{R^{(k)T} R^{(k)}}{H^{(k+1)T} A H^{(k+1)}} ;$$

$$7. \quad x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda_{k+1} H^{(k+1)} ;$$

$$8. \quad R^{(k+1)} = R^{(k)} + \lambda_{k+1} A H^{(k+1)} .$$

Método dos gradientes conjugados, aplicado diretamente às equações de observação, sem explicitar a formação das equações normais

Introdução

Seja A uma matriz arbitrária, não simétrica e definida positiva, de dimensão $n \times n$. Seja ainda o sistema de equações lineares;

$$Ax + \ell = 0. \quad (4.4.6.1-1)$$

Multiplicando a (4.4.6.1-1) por A^T , vem:

$$(A^T A) x + A^T \ell = 0. \quad (4.4.6.1-2)$$

Se A é uma matriz regular, então $A^T A$ é simétrica e definida positiva. |Teorema 2.12|

O sistema de equações dado por (4.4.6.1-2) é equivalente ao sistema (4.4.1-1).

4.4.6.2 Procedimento

Para usar o método dos gradientes conjugados diretamente, sem a formação explícita da matriz simétrica e definida positiva (N), é usado o seguinte procedimento:

Sejam as equações de observação

$$Ax + \ell = v, \quad (4.4.6.2-1)$$

onde:

A = matriz dos coeficientes das equações de observação de dimensão $m \times n$;

ℓ = vetor dos termos independentes (constantes) de dimensão $m \times 1$;

v = vetor dos resíduos de dimensão $m \times 1$.

As equações normais para (4.4.6.2-1), podem ser escritas como

$$A^T A x + A^T \ell = 0, \quad (4.4.6.2-2)$$

as quais são equivalentes a (4.4.6.1-2).

Isto é o resultado de aplicação do Método

dos Mínimos Quadrados (com $P=I$), no caso paramétrico.

Por analogia à equação (4.4.4-7), os vetores $h^{(j)}$ e $v^{(j)}$ podem ser escritos:

$$h^{(j)} = A^T A x^{(j)} + A^T \ell \quad (4.4.6.2-3)$$

$$\text{e } v^{(j)} = A x^{(j)} + \ell \quad (4.4.6.2-4)$$

Substituindo $A x^{(j)}$ da (4.4.6.2-3) na (4.4.6.2-4), vem:

$$h^{(j)} = A^T \left[v^{(j)} - \ell \right] + A^T \ell . .$$

$$h^{(j)} = A^T v^{(j)} - A^T \ell + A^T \ell . .$$

$$h^{(j)} = A^T v^{(j)} . \quad (4.4.6.2-5)$$

No algoritmo dos gradientes conjugados, N pode ser representado por $A^T A$ nas equações (4.4.4-4), (4.4.4-5) e (4.4.4-6). Assim, podemos escrever

$$h^{(j)T} N h^{(j)} = h^{(j)T} A^T A h^{(j)} = (A h^{(j)})^T (A h^{(j)})$$

ou

$$h^{(j)T} N h^{(j)} = (A h^{(j)})^T (A h^{(j)}) . \quad (4.4.6.2-6)$$

Similarmente à equação (4.4.4-8), uma expressão para o resíduo $v^{(j)}$ após j iterações pode ser encontrada:

$$v^{(j)} = Ax^{(j)} + \ell = A \left[x^{(j-1)} + \lambda_j h^{(j)} \right] + \ell \therefore$$

$$v^{(j)} = (Ax^{(j-1)} + \ell) + \lambda_j A h^{(j)} \therefore$$

$$v^{(j)} = v^{(j-1)} + \lambda_j A h^{(j)} \quad (4.4.6.2-7)$$

Assim, o vetor resíduo $v^{(j)}$, após j iterações pode ser calculado através de dois caminhos, de acordo com as equações (4.4.6.2-4) e (4.4.6.2-7), proporcionando, desta forma, um teste computacional comparativo. Entretanto, para aumentar a estabilidade do processo, $v^{(j)}$ será calculado, em cada passo iterativo, pela (4.4.6.2-4) e não, recursivamente, pela equação (4.4.6.2-7). | 23 |

O vetor resíduo $h^{(j)}$ será também calculado, sucessivamente de acordo com (4.4.6.2-5) e não, recursivamente, pela (4.4.4-8).

Pode ser provado que a norma de $v^{(j)}$ decresce monotonicamente ao se resolver as equações de observação (4.4.6.2-4).

Pela (4.4.6.2-7), vem:

$$v^{(j-1)} = v^{(j)} - \lambda_j A h^{(j)} \dots$$

$$v^{(j-1)T} v^{(j-1)} = \left[v^{(j)} - \lambda_j A h^{(j)} \right]^T \left[v^{(j)} - \lambda_j A h^{(j)} \right] \dots$$

$$v^{(j-1)T} v^{(j-1)} = \left[v^{(j)T} - (\lambda_j A h^{(j)})^T \right] \left[v^{(j)} - \lambda_j A h^{(j)} \right] \dots$$

$$v^{(j-1)T} v^{(j-1)} = v^{(j)T} v^{(j)} - \lambda_j v^{(j)T} A h^{(j)} - \lambda_j h^{(j)T} A^T v^{(j)} +$$

$$+ \lambda_j^2 h^{(j)T} A^T A h^{(j)} \dots$$

$$v^{(j-1)T} v^{(j-1)} = v^{(j)T} v^{(j)} - \lambda_j v^{(j)T} A h^{(j)} - \lambda_j (A h^{(j)})^T v^{(j)} +$$

$$+ \lambda_j^2 (A h^{(j)})^T (A h^{(j)}) \dots$$

$$v^{(j-1)T} v^{(j-1)} = v^{(j)T} v^{(j)} - \lambda_j v^{(j)T} A h^{(j)} - \lambda_j v^{(j)T} A h^{(j)} +$$

$$+ \lambda_j^2 (A h^{(j)})^T (A h^{(j)}) \dots$$

$$v^{(j-1)T} v^{(j-1)} = v^{(j)T} v^{(j)} - 2\lambda_j v^{(j)T} A h^{(j)} +$$

$$+\lambda_j^2 (A h^{(j)})^T \cdot (A h^{(j)}) . \quad (4.4.6.2-8)$$

Pelas equações (4.4.6.2-5) e (4.4.4.9), vem:

$$v^{(j)T} (A h^{(j)}) = (A^T v^{(j)})^T h^{(j)} = \kappa^{(j)T} h^{(j)} = 0 . \quad (4.4.6.2-9)$$

Considerando a (4.4.6.2-9), a (4.4.6.2-8) pode ser escrita:

$$v^{(j)T} v^{(j)} = v^{(j-1)T} v^{(j-1)} - \lambda_j^2 (A h^{(j)})^T (A h^{(j)}) . \quad (4.4.6.2-10)$$

Uma vez que $x^{(j-1)}$ ainda não é a solução de (4.4.6.2-1) e $\kappa^{(j-1)} \neq 0$, em consequência $E_{j-1} \neq 0$ e $h^{(j)} \neq 0$; assim $A h^{(j)} \neq 0$ e $\lambda_j > 0$, por conseguinte:

$$\lambda_j^2 (A h^{(j)})^T (A h^{(j)}) > 0. \quad (4.4.6.2-11)$$

Uma vez que:

$$||v^{(j)}|| = v^{(j)T} v^{(j)} ,$$

a equação (4.4.6.2-10) juntamente com a equação (4.4.6.2-11), prova que $||v^{(j-1)}|| > ||v^{(j)}||$, para

$j = 1, 2, 3, \dots$, e por conseguinte a norma do vetor resíduo $||v^{(j)}||$ decresce monotonicamente.

Dedução do algoritmo do método dos gradientes conjugados usando diretamente as equações de observação

Fazendo $N = A^T A$ na (4.4.4.4) e (4.4.4.5), vem:

$$E_{j-1} = \frac{h^{(j-1)T} A^T A h^{(j-1)}}{h^{(j-1)T} A^T A h^{(j-1)}} \dots$$

$$E_{j-1} = \frac{\begin{bmatrix} A & h^{(j-1)} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A h^{(j-1)} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} A & h^{(j-1)} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A h^{(j-1)} \end{bmatrix}},$$

para $j \geq 2$; (4.4.6.3-1)

$$\lambda_j = - \frac{h^{(j-1)T} h^{(j)}}{h^{(j)T} A^T A h^{(j)}} \dots$$

$$\lambda_j = - \frac{h^{(j-1)T} h^{(j)}}{\begin{bmatrix} A h^{(j)} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A h^{(j)} \end{bmatrix}} \quad (4.4.6.3-2)$$

ALGORITMO

1. Equações de observação $Ax + \ell = v$;
2. Vetor inicial (arbitrário) $x^{(0)} = 0$.

CÁLCULOS

$$3. \quad v^{(0)} = Ax^{(0)} + \ell$$

PASSOS DE RELAXAÇÃO $j = 1, 2, \dots, n$:

$$4. \quad \kappa^{(j-1)} = A^T v^{(j-1)} ;$$

$$5. \quad E_{j-1} = \frac{[A \kappa^{(j-1)}]^T [A h^{(j-1)}]}{[A h^{(j-1)}]^T [A h^{(j-1)}]} , \text{ para } j \geq 2 ;$$

$$6. \quad h^{(j)} = \begin{cases} - \kappa^{(0)} , & (\text{para } j = 1) ; \\ - \kappa^{(j-1)} + E_{j-1} h^{(j-1)} , & (\text{para } j \geq 2) ; \end{cases}$$

$$7. \quad \lambda_j = - \frac{\kappa^{(j-1)T} h^{(j)}}{[A h^{(j)}]^T [A h^{(j)}]} ;$$

$$8. \quad x^{(j)} = x^{(j-1)} + \lambda_j h^{(j)} ;$$

$$9. \quad v^{(j)} = Ax^{(j)} + \ell ;$$

$$9a. \quad \underset{\text{Check}}{v^{(j)}} = v^{(j-1)} + \lambda_j A h^{(j)} .$$

Ocorre convergência se

$$h^{(j-1)T} h^{(j)} \leq 3 \times \text{RFE}, \text{ com}$$

$$\text{RFE} = \left| A^T (v^{(j)} - v_{\text{Check}}^{(j)}) \right|^2 . \quad | 24 |$$

Utilizando notação adequada a este trabalho, vem:

$$1. Ax + L = V ;$$

$$2. x^{(0)} = 0;$$

$$3. v^{(0)} = Ax^{(0)} + L.$$

Passos de iteração $k = 0, 1, 2, \dots$

$$4. R^{(k)} = A^T V^{(k)} ;$$

$$5. E_k = \frac{\begin{bmatrix} A R^{(k)} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A H^{(k)} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} A H^{(k)} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A H^{(k)} \end{bmatrix}}, \quad \text{para } k \geq 0 ;$$

$$6. H^{(1)} = - R^{(0)}, \quad \text{para } k = 0;$$

$$7. H^{(k+1)} = - R^{(k)} + E_k H^{(k)}, \quad \text{para } k \geq 1 ;$$

$$8. \quad \lambda_{k+1} = - \frac{R^{(k)T} H^{(k+1)}}{\left[A H^{(k+1)} \right]^T A H^{(k+1)}} ;$$

$$9. \quad x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda_{k+1} H^{(k+1)} ;$$

$$10. \quad v^{(k+1)} = A x^{(k+1)} + L ;$$

$$11. \quad v_{\text{Check}}^{(k+1)} = v^{(k)} + \lambda_{k+1} A H^{(k+1)} .$$

12. TESTE DE CONVERGÊNCIA:

$$R^{(k)T} R^{(k+1)} \leq 3 * RFE, \text{ com}$$

$$RFE = \left| A^T (v^{(k+1)} - v_{\text{Check}}^{(k+1)}) \right|^2 .$$

No algoritmo anterior, consideram-se unitários os pesos das observações.

Considerem-se agora observações com pesos diferentes da unidade.

Sejam as equações de observação, dadas em (4.4.6.2-1),

$$Ax + \ell = v .$$

As correspondentes equações normais podem ser

escritas por

$$A^T P A x + A^T P \ell = 0 , \quad (4.4.6.3-3)$$

sendo P matriz dos pesos das observações, a qual é uma matriz diagonal de dimensão $m \times m$, tem-se:

$$N = A^T P A \quad (4.4.6.3-4)$$

$$e \quad u = A^T P \ell . \quad (4.4.6.3-5)$$

Substituindo as (4.4.6.3-4) e (4.4.6.3-5) na (4.4.4-7), vem:

$$h^{(j)} = A^T P A x^{(j)} + A^T P \ell . \quad (4.4.6.3-6)$$

Da (4.4.6.2-4), pode-se escrever:

$$A x^{(j)} = v^{(j)} - \ell \quad (4.4.6.3-7)$$

Substituindo a (4.4.6.3-7) na (4.4.6.3-6):

$$h^{(j)} = A^T P \left[v^{(j)} - \ell \right] + A^T P \ell . .$$

$$h^{(j)} = A^T P v^{(j)} - A^T P \ell + A^T P \ell . .$$

$$h^{(j)} = A^T P v^{(j)} . .$$

$$h^{(j)} = (PA)^T v^{(j)} . \quad (4.4.6.3-8)$$

Substituindo a (4.4.6.3-4) na (4.4.4-4), vem:

$$E_{j-1} = \frac{\begin{bmatrix} PA \quad \ell(j-1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A \quad h(j-1) \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} PA \quad h(j-1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A \quad h(j-1) \end{bmatrix}} \quad (4.4.6.3-9)$$

Substituindo a (4.4.6.3-4) na (4.4.4-5), tem-se:

$$\lambda_j = - \frac{\ell(j-1)^T h(j)}{\begin{bmatrix} PA \quad h(j) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A \quad h(j) \end{bmatrix}} \quad (4.4.6.3-10)$$

O algoritmo no presente caso pode ser escrito:

1. Equações de observação $Ax + \ell = v$;
2. $x^{(0)} = 0$;
3. $v^{(0)} = Ax^{(0)} + L$;
4. $R^{(k)} = (PA)^T v^{(k)}$;

$$5. \quad E_k = \frac{\begin{bmatrix} PA \quad R^{(k)} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A \quad H^{(k)} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} PA \quad H^{(k)} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A \quad H^{(k)} \end{bmatrix}};$$

$$6. \quad H^{(1)} = -R^{(0)}, \quad k = 0;$$

$$7. \quad H^{(k+1)} = -R^{(k)} + E_k H^{(k)}, \text{ para } k \geq 1;$$

$$8. \quad \lambda_{k+1} = - \frac{R^{(k)T} H^{(k+1)}}{\begin{bmatrix} PA H^{(k+1)} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A H^{(k+1)} \end{bmatrix}};$$

$$9. \quad X^{(k+1)} = X^{(k)} + \lambda_{k+1} H^{(k+1)};$$

$$10. \quad V^{(k+1)} = AX^{(k+1)} + L;$$

$$11. \quad V_{\text{Check}}^{(k+1)} = V^{(k)} + \lambda_{k+1} A H^{(k+1)};$$

12. TESTE DE CONVERGÊNCIA:

Como no algoritmo anterior.

4.4.7 Cálculo da inversa da matriz normal N, utilizando o método dos Gradientes Conjugados

Para a análise de uma rede geodésica, faz-se necessário o cálculo da matriz variância-covariância (Σ). Isto requer o cálculo de N^{-1} , a matriz inversa da matriz dos coeficientes das equações normais.

A matriz Σ é dada por:

$$\Sigma = \hat{\sigma}_0^2 \cdot Q, \quad (4.4.7-1)$$

onde $Q = N^{-1}$ e $\hat{\sigma}_0^2$ é a variância da unidade de peso.

Pelo método dos gradientes conjugados, a matriz inversa N^{-1} é calculada, coluna por coluna, e, para cada coluna de N^{-1} , os passos de cálculo necessários são os mesmos que para obter a solução do sistema (4.4.1-1).

Para grandes sistemas, o tempo de cálculo para obter uma coluna de N^{-1} , ou para obter o vetor solução de (4.4.1-1), é grande.

O algoritmo para calcular N^{-1} é obtido pelo seguinte caminho:

se N^{-1} é a matriz inversa de N , então

$$N \cdot N^{-1} = I \quad (4.4.7-2)$$

ou

$$N \cdot Q = I. \quad (4.4.7-3)$$

Sejam q_h o h -ésimo vetor coluna de $(Q=N^{-1})$ e e_h o h -ésimo vetor coluna de I . Desta forma, q_h é a solução para o sistema

$$N q_h - e_h = 0. \quad (4.4.7-4)$$

O h -ésimo vetor coluna (q_h) da matriz inversa (N^{-1}) pode ser obtido mediante a aplicação das fórmulas (4.4.2-5), (4.4.4-1), (4.4.4-2), (4.4.4-4), (4.4.4-5) e (4.4.4-6).

1º ALGORITMO: Partindo da matriz normal N , tem-se:

$$1. N q_h - e_h = 0, \text{ com } (h = 1, 2, \dots, n);$$

$$2. q_h^{(0)} = 0, \quad h^{(0)} = N q_h^{(0)} - e_h = -e_h.$$

Passos iterativos $j = 1, 2, \dots$

$$3. \epsilon_{j-1} = \frac{h^{(j-1)T} N h^{(j-1)}}{h^{(j-1)T} N h^{(j-1)}};$$

$$4. \ h^{(j)} = \begin{cases} -\kappa^{(j-1)} & (\text{para } j=1) \quad \text{ou} \quad h^{(1)} = -\kappa^{(0)} ; \\ h^{(j)} = -\kappa^{(j-1)} + \epsilon_{j-1} h^{(j-1)}, & (j \geq 2) ; \end{cases}$$

$$5. \ \lambda_j = - \frac{\kappa^{(j-1)T} h^{(j)}}{h^{(j)T} N h^{(j)}} ;$$

$$6. \ q_{\kappa}^{(j)} = q_{\kappa}^{(j-1)} + \lambda_j h^{(j)} ;$$

$$7. \ \kappa^{(j)} = \kappa^{(j-1)} + \lambda_j N h^{(j)} .$$

8. TESTE DE CONVERGÊNCIA

$$\left| q_{\kappa}^{(j)} - q_{\kappa}^{(j-1)} \right| < \epsilon$$

com ϵ preestabelecido de acordo com a precisão desejada.

Adaptando para a notação usual do presente trabalho, vem:

$$1. \ N \cdot q_{\kappa} - e_{\kappa} = 0 ;$$

$$2. \ q_{\kappa}^{(0)} = 0 ;$$

$$3. \ R^{(0)} = - e_{\kappa} ;$$

PASSOS ITERATIVOS $k = 0, 1, 2, \dots$

$$4. \quad \epsilon_k = \frac{R^{(k)T} N H^{(k)}}{H^{(k)T} N H^{(k)}}, \quad k \geq 1;$$

$$5. \quad H^{(k+1)} = -R^{(k)}, \quad (k=0) \rightarrow H^{(1)} = -R^{(0)};$$

$$H^{(k+1)} = -R^{(k)} + \epsilon_k H^{(k)}, \quad k \geq 1;$$

$$6. \quad \lambda_{k+1} = - \frac{R^{(k)T} H^{(k+1)}}{H^{(k+1)T} N H^{(k+1)}};$$

$$7. \quad q_h^{(k+1)} = q_h^{(k)} + \lambda_{k+1} H^{(k+1)};$$

$$8. \quad R^{(k+1)} = R^{(k)} + \lambda_{k+1} N H^{(k+1)};$$

9. TESTE DE CONVERGÊNCIA

$$\left| q_h^{(k+1)} - q_h^{(k)} \right| < \epsilon.$$

2º ALGORITMO: Utilizando diretamente as equações de observação $Ax + L = V$.

$$\text{Sabe-se que } N = A^T A$$

Substituindo $N = A^T A$ na (4.4.7-4), vem:

$$A^T A q_h - e_h = 0.$$

Considerando $q_h^{(0)}$ como o vetor inicial, define-se o vetor resíduo $R^{(0)}$ por:

$$R^{(0)} = A^T A q_h^{(0)} - e_h . \quad (4.4.7-5)$$

O algoritmo completo do método dos gradientes conjugados para obter o h -ésimo vetor coluna da inversa N^{-1} da matriz normal, usando diretamente os coeficientes da matriz A do sistema linear das equações de observação, pode ser dado como segue:

DADOS: equações de observação $Ax + L = V$.

ARBITRÁRIO: VETOR INICIAL: $q_h^{(0)} = 0$.

CÁLCULOS

$$1. \quad R^{(0)} = -e_h .$$

ESTÁGIOS DE ITERAÇÃO: $k = 0, 1, 2, \dots$

$$2. \quad \epsilon_k = \frac{\begin{bmatrix} A & R^{(k)} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A & H^{(k)} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} A & H^{(k)} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A & H^{(k)} \end{bmatrix}} , \text{ com } k \geq 1 ;$$

$$3. \quad H^{(k+1)} = \begin{cases} -R^{(0)} , & (\text{para } k=0) ; \\ -R^{(k)} + \epsilon_k H^{(k)} , & (\text{para } k \geq 1) ; \end{cases}$$

$$4. \quad \lambda_{k+1} = - \frac{R^{(k)T} H^{(k+1)}}{\begin{bmatrix} A & H^{(k+1)} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A & H^{(k+1)} \end{bmatrix}} ;$$

$$5. \quad q_h^{(k+1)} = q_h^{(k)} + \lambda_{k+1} H^{(k+1)} ;$$

$$6. \quad R^{(k+1)} = R^{(k)} + \lambda_{k+1} A^T \begin{bmatrix} A & H^{(k+1)} \end{bmatrix}.$$

7. TESTE DE CONVERGÊNCIA: como indicado no algoritmo do § 4.4.6-3.

CONVERGÊNCIA DE PROCESSOS ITERATIVOS PARA SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Seja o sistema de equações lineares

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad (j=1,2,\dots,n). \quad (4.5.1)$$

Tal sistema pode ser representado na forma

$$x_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j + \beta_i, \quad (4.5.2)$$

com

$$\alpha_{ij} = - \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \quad (j \neq i) \quad \text{e} \quad \beta_i = \frac{b_i}{a_{ii}}.$$

4.5.1 Condições suficientes de convergência

Seja o sistema linear dado na forma (4.5.2)

$$x = \alpha x + \beta, \quad (4.5.1-1)$$

com $\alpha = [\alpha_{ij}]$, matriz $n \times n$,

$$\beta^T = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \dots & \beta_n \end{bmatrix}$$

e o vetor solução procurado

$$x^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \end{bmatrix}.$$

TEOREMA 4.5.1

Os processos iterativos de um sistema linear (4.5.1-1) CONVERGEM para a solução única se qualquer uma das normas canônicas da matriz α é inferior à unidade. Isto é, para os processos iterativos

$$x^{(k)} = \beta + \alpha x^{(k-1)}, \quad (k = 1, 2, \dots)$$

(com $x^{(0)}$ arbitrário), a condição suficiente de convergência é $||\alpha|| < 1$.

Demonstração: Consideremos um vetor arbitrário $x^{(0)}$ e

a seqüência de aproximações:

$$\begin{aligned}x^{(1)} &= \beta + \alpha x^{(0)} ; \\x^{(2)} &= \beta + \alpha x^{(1)} ; \\&\vdots \\x^{(k)} &= \beta + \alpha x^{(k-1)} .\end{aligned}$$

Assim:

$$x^{(k)} = (I + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \dots + \alpha^{k-1})\beta + \alpha^k x^{(0)} . \quad (4.5.1-2)$$

Realmente, se

$$x^{(1)} = \beta + \alpha x^{(0)}, \text{ para } (k=1) ,$$

e supondo que vale para $k=n$, vem:

$$x^{(n)} = \beta + \alpha x^{(n-1)} \text{ e}$$

$$x^{(n)} = (I + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \dots + \alpha^{n-1})\beta + \alpha^n x^{(0)} ,$$

pode-se escrever

$$x^{(n+1)} = \beta + \alpha x^{(n)} .$$

$$x^{(n+1)} = \beta + \alpha \left[(I + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \dots + \alpha^{n-1})\beta + \alpha^n x^{(0)} \right] .$$

$$x^{(n+1)} = \beta + \alpha\beta + \alpha^2\beta + \alpha^3\beta + \dots + \alpha^n\beta + \alpha^{n+1} x^{(0)} \dots$$

$$x^{(n+1)} = (I + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \dots + \alpha^n) \beta + \alpha^{n+1} x^{(0)} .$$

Como, para $||\alpha|| < 1$, tem-se $||\alpha^k|| \rightarrow 0$, quando $k \rightarrow \infty$, vem (conforme CAPÍTULO II, § 2.5.4)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha^k = 0$$

e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (I + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \dots + \alpha^{k-1}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = (I - \alpha)^{-1} .$$

Portanto, levando a igualdade (4.5.1-2) ao limite, quando $k \rightarrow \infty$, vem:

$$x = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = (I - \alpha)^{-1} \beta + 0 \dots$$

$$x = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = (I - \alpha)^{-1} \beta . \quad (4.5.1-3)$$

A convergência da iteração fica assim demonstrada.

De (4.5.1-3), vem:

$$(I - \alpha) x = \beta \quad . \quad .$$

$$x = \alpha x + \beta \quad ,$$

isto é, o vetor limite x é uma solução do sistema. A matriz do sistema (4.5.1-1), $I - \alpha$, sendo regular, a solução x é única.

COROLÁRIO 4.5.1:

Para o sistema $x = \alpha x + \beta$, os processos iterativos convergem se:

$$A) \quad ||\alpha||_m = \max_i \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| < 1$$

ou

$$B) \quad ||\alpha||_\ell = \max_j \sum_{i=1}^n |\alpha_{ij}| < 1 ;$$

ou ainda

$$C) \quad ||\alpha||_k = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}|^2} < 1 .$$

Em particular, os processos iterativos são necessariamente convergentes se os elementos da matriz α verificam a desigualdade

$$|\alpha_{ij}| < \frac{1}{n} ,$$

onde n é o número de incógnitas do sistema (4.5.1-1).

Com efeito, A), B) e C) são as normas canônicas mais simples da matriz α . Pelo teorema 4.5.1, a condição suficiente $||\alpha|| < 1$ está satisfeita.

EXEMPLO 4.5.1

Seja o sistema

$$\begin{aligned} 0,78x_1 - 0,02x_2 - 0,12x_3 - 0,14x_4 &= 0,76, \\ - 0,02x_1 + 0,86x_2 - 0,04x_3 + 0,06x_4 &= 0,08, \\ - 0,12x_1 - 0,04x_2 + 0,72x_3 - 0,08x_4 &= 1,12 , \\ - 0,14x_1 + 0,06x_2 - 0,08x_3 + 0,74x_4 &= 0,68 . \quad |25| \end{aligned}$$

Escrevendo o sistema na forma

$$x = \alpha x + \beta, \text{ resulta:}$$

$$x_1 = 0,03x_2 + 0,15x_3 + 0,18x_4 + 0,97,$$

$$x_2 = 0,02x_1 + 0,05x_3 - 0,07x_4 + 0,09,$$

$$x_3 = 0,17x_1 + 0,06x_2 + 0,11x_4 + 1,56$$

$$\text{e } x_4 = 0,19x_1 - 0,08x_2 - 0,11x_3 + 0,92.$$

Calculando as normas canônicas:

$$||\alpha||_m = \max_i \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}|.$$

$$||\alpha||_m = \max_i (0,36; 0,14; 0,34; 0,38);$$

$$\text{e } ||\alpha||_m = 0,38 < 1;$$

$$||\alpha||_\ell = \max_j \sum_{i=1}^n |\alpha_{ij}| = \max_j (0,38; 0,17; 0,31; 0,36).$$

$$||\alpha||_\ell = 0,38 < 1; \quad \text{e}$$

$$||\alpha||_k = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}|^2} = \sqrt{0,1628} = 0,4034848 < 1.$$

Logo, tal sistema converge para a solução única ao se aplicar um processo iterativo.

COROLÁRIO 4.5.2:

Para o sistema

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad (i=1,2,\dots,n), \quad (4.5.1-4)$$

os processos iterativos convergem se forem satisfeitas as desigualdades:

$$A') \quad |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad (i=1,2,\dots,n),$$

ou

$$B') \quad |a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}|, \quad (j=1,2,\dots,n).$$

Com efeito, se a desigualdade A') tem lugar, é evidente que a desigualdade A) do corolário (4.5.1) é verificada.

Para demonstrar a proposição B'), faça-se em (4.5.1-4)

$$x_i = \frac{z_i}{a_{ii}} \quad (i = 1,2,\dots,n),$$

onde z_i serão as novas incógnitas.

Obtem-se agora o sistema

$$\sum_{j=1}^n \frac{a_{ij}}{a_{jj}} z_j = b_i, \quad (i = 1,2,\dots,n), \quad (4.5.1-5)$$

para o qual a iteração converge ou diverge simultaneamente com a iteração do sistema inicial (4.5.1-4).

Adaptando, pelo procedimento usual, o sistema (4.5.1-5) à forma especial (4.5.1-1) e aplicando a condição B) do corolário (4.5.1), obtem-se para o sistema (4.5.1-5) a condição suficiente de convergência dos processos iterativos, que é:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{jj}} \right| < 1, \text{ com } (j = 1, 2, \dots, n) ,$$

ou

$$|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}|, \text{ com } (j = 1, 2, \dots, n) .$$

Estimativa do erro nas aproximações dos processos iterativos

Sejam $x^{(k-1)}$ e $x^{(k)}$ duas aproximações sucessivas da solução do sistema $x = \alpha x + \beta$. Para $p \geq 1$, tem-se:

$$\begin{aligned} ||x^{(k+p)} - x^{(k)}|| &\leq ||x^{(k+1)} - x^{(k)}|| + \\ &||x^{(k+2)} - x^{(k+1)}|| + \dots + ||x^{(k+p)} - x^{(k+p-1)}|| . \end{aligned}$$

Como

$$x^{(m+1)} = \alpha x^{(m)} + \beta$$

e

$$x^{(m)} = \alpha x^{(m-1)} + \beta ,$$

tem-se:

$$x^{(m+1)} - x^{(m)} = \alpha (x^{(m)} - x^{(m-1)})$$

e, assim:

$$||x^{(m+1)} - x^{(m)}|| \leq ||\alpha|| ||x^{(m)} - x^{(m-1)}|| \leq$$

$$\leq ||\alpha||^{m-k} ||x^{(k+1)} - x^{(k)}|| , \text{ para } 1 \leq k < m .$$

Vem, da fórmula (4.5.2-1) :

$$||x^{(p+k)} - x^{(k)}|| \leq ||x^{(k+1)} - x^{(k)}|| + ||\alpha|| \dots$$

$$||x^{(k+1)} - x^{(k)}|| + \dots + ||\alpha||^{p-1} ||x^{(k+1)} - x^{(k)}||$$

$$\leq \frac{1}{1 - ||\alpha||} ||x^{(k+1)} - x^{(k)}|| .$$

Calculando o limite da última desigualdade quando $p \rightarrow \infty$,

obtem-se finalmente:

$$||x - x^{(k)}|| \leq \frac{||x^{(k+1)} - x^{(k)}||}{1 - ||\alpha||}, \text{ para } k \geq 1, (4.5.2-2)$$

ou

$$||x - x^{(k)}|| \leq \frac{||\alpha||}{1 - ||\alpha||} ||x^{(k)} - x^{(k-1)}||.$$

$$\text{Se } ||\alpha|| \leq \frac{1}{2},$$

a fórmula precedente pode ser escrita na forma

$$||x - x^{(k)}|| \leq ||x^{(k)} - x^{(k-1)}||, \text{ isto é,}$$

neste caso,

$$||x^{(k)} - x^{(k-1)}|| < \varepsilon, \text{ acarreta igualmente}$$

$$||x - x^{(k)}|| < \varepsilon.$$

No caso geral, durante o cálculo verifica-se que

$$||x^{(k)} - x^{(k-1)}|| \leq \frac{1 - q}{q} \varepsilon,$$

onde $q = ||\alpha|| < 1$; assim,

$$||x - x^{(k)}|| \leq \varepsilon$$

e, por conseguinte,

$$|x_i - x_i^{(k)}| \leq \varepsilon, \text{ com } (i=1, 2, \dots, n).$$

Supõe-se que as aproximações sucessivas $x^{(j)}$, $(j=0, 1, 2, \dots, k)$, calculam-se exatamente sem nenhum erro de arredondamento.

Utilizando as estimativas obtidas anteriormente para a norma da diferença de duas aproximações sucessivas, tem-se, a partir da fórmula (4.5.2-2):

$$||x - x^{(k)}|| \leq \frac{||\alpha||^k}{1 - ||\alpha||} ||x^{(1)} - x^{(0)}||.$$

Em particular, escolhendo-se

$$x^{(0)} = \beta,$$

$$\text{vem } x^{(1)} = \alpha x^{(0)} + \beta.$$

$$x^{(1)} = \alpha \beta + \beta$$

$$\text{e } ||x^{(1)} - x^{(0)}|| = ||\alpha \beta|| \leq ||\alpha|| ||\beta||.$$

Por conseguinte:

$$||x - x^{(k)}|| \leq \frac{||\alpha||^{k+1}}{1 - ||\alpha||} ||\beta||. \quad (4.5.2-3)$$

EXEMPLO 4.5.2

Mostrar-se-á que, para o sistema

$$4x_1 + x_2 + x_3 = 9,$$

$$2x_1 + 5x_2 + x_3 = 15$$

$$\text{e} \quad x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 29,$$

os processos iterativos convergem. Avaliar-se-á o número de iterações necessárias para a convergência com uma precisão de 10^{-4} .

O sistema está na forma

$$\sum_{i=1}^3 a_{ij} x_j = b_i, \text{ com } j = (1, 2, 3).$$

Escreve-se o sistema na forma :

$$x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 a_{ij} x_j + \beta_i, \text{ com } (i = 1, 2, 3),$$

onde

$$\alpha_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \quad (j \neq i) \quad \beta_i = \frac{b_i}{a_{ii}},$$

$$x_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3 + \frac{b_1}{a_{11}},$$

$$x_2 = -\frac{a_{21}}{a_{22}} x_1 - \frac{a_{23}}{a_{22}} x_3 + \frac{b_2}{a_{22}}$$

$$\text{e } x_3 = -\frac{a_{31}}{a_{33}} x_1 - \frac{a_{32}}{a_{33}} x_2 + \frac{b_3}{a_{33}}, \text{ assim:}$$

$$x_1 = -0,25x_2 - 0,25x_3 + 2,25,$$

$$x_2 = -0,40x_1 - 0,20x_3 + 3,00$$

$$\text{e } x_3 = -0,125x_1 - 0,25x_2 + 3,625, \text{ com}$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -0,25 & -0,25 \\ -0,40 & 0 & -0,20 \\ -0,125 & -0,25 & 0 \end{bmatrix}.$$

Utiliza-se qualquer uma das normas m, ℓ, k .

Seja a norma $||\alpha||_{\ell}$:

$$||\alpha||_{\ell} = \max_j \sum_{i=1}^3 |\alpha_{ij}| \quad .\cdot.$$

$$||\alpha||_{\ell} = \max_j (0,525; 0,50; 0,45) \cdot \cdot.$$

$$||\alpha||_{\ell} = 0,525 < 1.$$

Logo, o sistema converge para uma solução única.

Avalia-se agora o número de iterações.

Seja $x^{(0)} = \beta = \begin{bmatrix} 2,250 \\ 3,000 \\ 3,625 \end{bmatrix}$ a aproximação inicial.

Aplica-se a fórmula:

$$||x - x^{(k)}|| \leq \frac{||\alpha||^{k+1}}{1 - ||\alpha||} ||\beta||, \text{ com}$$

$||\beta|| = ||\beta||_{\ell} = 2,25 + 3 + 3,625 = 8,875$, pelo
que:

$$||x - x^{(k)}|| \leq \frac{||\alpha||_{\ell}^{k+1}}{1 - ||\alpha||_{\ell}} ||\beta||_{\ell} = \frac{(0,525)^{k+1} (8,875)}{0,475} < 10^4 \dots$$

$$0,525^{k+1} \cdot 8,875 < 0,475 \cdot 10^4 \dots$$

$$0,525^{k+1} < \frac{0,475}{8,875} \cdot 10^4 \dots$$

$$0,525^{k+1} < \frac{475}{8875} \cdot 10^{-4} \dots$$

$$(k+1) \log 0,525 < \log 475 - \log 8875 - 4 \log 10 \dots$$

$$-(k+1) \cdot 0,2798406 < 2,6766936 - 3,9481683 - 4 \dots$$

$$-(k+1) \cdot 0,2798406 < -5,2714747 \therefore$$

$$k+1 > \frac{5,2714747}{0,2798406} \therefore$$

$$k+1 > 18,837419 \therefore$$

$$k > 17,837419 \rightarrow k = 18.$$

Nota-se que a estimativa teórica do número de iterações necessárias para assegurar a precisão dada é, na prática, bastante grande, comparado com a dimensão do sistema.

OBSERVAÇÃO: O estudo de convergência e a estimativa de erros feitos nos parágrafos 4.5.1 e 4.5.2 são aplicados ao método iterativo de Jacobi.

4.5.3 Condições suficientes para a convergência do processo iterativo de Gauss-Seidel.

4.5.3.1 Primeira condição suficiente

TEOREMA 4.5.2

Se o sistema linear

$$x = \alpha x + \beta$$

(4.5.3-1)

verifica a condição

$$\| \alpha \|_m < 1, \quad (4.5.3-2)$$

onde

$$\| \alpha_m \| = \max_i \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}|,$$

o processo de Gauss-Seidel para o sistema (4.5.3-1) converge para uma solução única, qualquer que seja a escolha do vetor inicial $x^{(0)}$.

DEMONSTRAÇÃO:

Seja $x^{(k)} = \{ x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \}$ a k-ésima

aproximação do método iterativo de Gauss-Seidel. Assim:

$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{(k)} + \sum_{j=i}^n \alpha_{ij} x_j^{(k-1)} + \beta_i,$$

(4.5.3-3)

com $(i = 1, 2, \dots, n)$ e $(k = 1, 2, \dots)$.

Se a condição (4.5.3-2) é satisfeita, o sistema (4.5.3-1) admite solução única $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, que pode ser obtida, por exemplo, a partir do método iterativo simples (JACOBI):

$$x_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j + \beta_i, \quad (i=1,2,\dots,n). \quad (4.5.3-4)$$

Subtraindo a (4.5.3-3) da (4.5.3-4), obtem-se:

$$x_i - x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} (x_j - x_j^{(k)}) + \sum_{j=i}^n \alpha_{ij} (x_j - x_j^{(k-1)}).$$

Assim:

$$\left| x_i - x_i^{(k)} \right| \leq \sum_{j=1}^{i-1} |\alpha_{ij}| \left| x_j - x_j^{(k)} \right| + \sum_{j=i}^n |\alpha_{ij}| \left| x_j - x_j^{(k-1)} \right|,$$

$$\text{com} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4.5.3-5)$$

Considerando o sentido da norma adotada, vem:

$$\|x - x^{(k)}\|_m = \max_i |x_i - x_i^{(k)}|.$$

$$|x_j - x_j^{(k)}| \leq \|x - x^{(k)}\|_m,$$

$$\text{com} \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Então, deduz-se da desigualdade (4.5.3-5):

$$|x_i - x_i^{(k)}| \leq p_i \|x - x^{(k)}\|_m + q_i \|x - x^{(k-1)}\|_m, \quad (4.5.3-6)$$

$$\text{onde} \quad p_i = \sum_{j=1}^{i-1} |\alpha_{ij}|.$$

$$e \quad q_i = \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}|$$

Seja $s = s(k)$ o valor do índice i tal que:

$$||x_s - x_s^{(k)}||_m = \max_i ||x_i - x_i^{(k)}||_m = ||x - x^{(k)}||_m.$$

Na desigualdade (4.5.3-6) fazendo $i=s$, vem:

$$||x - x^{(k)}||_m \leq p_s ||x - x^{(k)}||_m + q_s ||x - x^{(k-1)}||_m$$

ou:

$$||x - x^{(k)}||_m \leq \frac{q_s}{1-p_s} ||x - x^{(k-1)}||_m.$$

Assim:

$$||x - x^{(k)}||_m \leq \mu ||x - x^{(k-1)}||_m \quad (4.5.3-7)$$

com

$$\mu = \max_i \sum_{j=1}^n \frac{q_i}{1-p_i}. \quad (4.5.3-8)$$

Mostre-se que $\mu \leq ||\alpha||_m < 1$.

Com efeito, já que

$$p_i + q_i = \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| \leq ||\alpha||_m < 1,$$

tem-se:

$$q_i \leq ||\alpha||_m - p_i$$

e

$$\frac{q_i}{1-p_i} \leq \frac{||\alpha||_m - p_i}{1-p_i} \dots$$

$$\frac{q_i}{1-p_i} \leq \frac{||\alpha||_m - p_i ||\alpha_m||}{1 - p_i} = ||\alpha_m|| \quad .$$

Logo:

$$\mu \leq ||\alpha||_m < 1.$$

A desigualdade (4.5.3-7) mostra que

$$||x - x^{(k)}||_m \leq \mu^k ||x - x^{(0)}||_m ,$$

por conseguinte:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x$$

e está demonstrada a convergência do método de Gauss-Seidel para a solução procurada.

OBSERVAÇÃO: Comparando a fórmula da desigualdade

$$||x - x^{(k)}|| \leq ||\alpha||_m ||x - x^{(k-1)}|| ,$$

do método iterativo simples (JACOBI), com a do método de Gauss-Seidel

$$||x - x^{(k)}|| \leq \mu ||x - x^{(k-1)}||,$$

onde $\mu \leq ||\alpha||_m$ (pelo teorema anterior), a convergência do método iterativo de Gauss-Seidel é, em geral, melhor do que a do processo iterativo simples.

A fórmula (4.5.3-8) mostra que ao se aplicar o método de Seidel, é cômodo dispor o sistema (4.5.3-1) de maneira que a soma dos módulos dos coeficientes da primeira equação seja o menor possível, isto é,

$$q_1 = \sum_{j=1}^n |\alpha_{1j}|.$$

Estimativa do erro das aproximações sucessivas no método de Gauss-Seidel utilizando a m-norma.

Sejam $x^{(k)}$ e $x^{(k+1)}$ duas iterações sucessivas do processo de Gauss-Seidel.

Aplicando à estas iterações as transformações utilizadas para demonstrar o teorema (4.5.2), obtemos uma desigualdade análoga à (4.5.3-7), isto é,

$$||x^{(k+1)} - x^{(k)}||_m \leq \mu ||x^{(k)} - x^{(k-1)}||_m \dots$$

$$\begin{aligned}
& \|x^{(k+p)} - x^{(k)}\|_m \leq \|x^{(k+p)} - x^{(k+p-1)}\|_m + \\
& + \|x^{(k+p-1)} - x^{(k+p-2)}\|_m + \dots + \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_m \leq \\
& \leq \mu^p \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_m + \mu^{p-1} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_m + \\
& + \dots + \mu \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_m \leq \frac{\mu}{1-\mu} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_m .
\end{aligned}$$

Quando $p \rightarrow \infty$, tem-se:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} x^{(k+p)} = x .$$

Assim:

$$\|x - x^{(k)}\|_m \leq \frac{\mu}{1-\mu} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_m ,$$

onde:

$$\mu = \max_i \frac{\sum_{j=i}^n |\alpha_{ij}|}{1 - \sum_{j=1}^{i-1} |\alpha_{ij}|} \leq \|\alpha\|_m .$$

Em particular, vem da desigualdade obtida:

$$\|x - x^{(k)}\|_m \leq \frac{\mu^k}{1-\mu} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_m ,$$

isto é:

$$|x_i - x_i^{(k)}| \leq \frac{\mu^k}{1-\mu} \max_j |x_j^{(1)} - x_j^{(0)}|, \text{ com}$$

$$(i = 1, 2, \dots, n).$$

Para uma escolha do vetor inicial

$$x^{(0)} = \beta, \text{ vem:}$$

$$||x^{(1)} - x^{(0)}|| \leq ||\alpha||_m ||\beta||_m \quad . \quad .$$

$$||x - x^{(k)}||_m \leq \frac{\mu^k}{1-\mu} ||\alpha||_m ||\beta||_m. \quad (4.5.3-9)$$

EXEMPLO 4.5.3

Avaliar-se-á o número de iterações necessárias para a convergência do exemplo 4.5.2, aplicando o método de Gauss-Seidel, com a utilização da m-norma:

$$||x - x^{(k)}||_m \leq \frac{\mu^k}{1-\mu} ||\alpha||_m ||\beta||_m, \text{ com}$$

$$\mu = \max_i \frac{q_i}{1-p_i},$$

$$q_i = \sum_{j=i}^n |\alpha_{ij}| \quad \text{e} \quad p_i = \sum_{j=1}^{i-1} |\alpha_{ij}|, \quad ,$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -0,25 & -0,25 \\ -0,40 & 0 & -0,20 \\ -0,125 & -0,25 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad \beta = \begin{bmatrix} 2,250 \\ 3,000 \\ 3,625 \end{bmatrix};$$

$$q_1 = \sum_{j=1}^{n=3} |\alpha_{1j}| = 0,25 + 0,25 = 0,50;$$

$$q_2 = \sum_{j=2}^3 |\alpha_{2j}| = 0,20;$$

$$q_3 = \sum_{j=3}^3 |\alpha_{3j}| = 0;$$

$$p_1 = \sum_{j=1}^0 |\alpha_{1j}| \quad (\text{n\~ao definido}) \quad ;$$

$$p_2 = \sum_{j=1}^1 |\alpha_{2j}| = 0,40 \quad ;$$

$$p_3 = \sum_{j=1}^2 |\alpha_{3j}| = 0,125 + 0,25 = 0,375;$$

$$\frac{q_2}{1-p_2} = \frac{0,20}{1-0,40} = \frac{0,20}{0,60} = 0,333 \dots ; e$$

$$\frac{p_3}{1-p_3} = 0.$$

Logo:

$$\mu = \max_{i=2} \frac{q_i}{1-p_i} = \frac{q_2}{1-p_2} = \frac{0,20}{0,60} = 0,333 \dots ;$$

$$\frac{\mu^k}{1-\mu} ||\alpha||_m ||\beta||_m < 10^{-4} ;$$

$$||\alpha||_m = 0,60 \quad ||\beta||_m = 3,625 ;$$

$$\frac{(0,333\dots)^k}{1 - 0,333\dots} \cdot 0,60 \times 3,625 < 10^4 ;$$

$$(0,333\dots)^k \cdot 2,175 < 0,6666667 \times 10^4 ;$$

$$k \log(0,333\dots) < \log 0,6666667 - \log 2,175 - 4 \log 10 ;$$

$$= k(0,4771212) < -0,1760912 - 0,3374592 - 4 ; \quad e$$

$$k > \frac{4,5135504}{0,4771212} , \quad k > 9,4599661$$

Logo: $k = 10$.

OBSERVAÇÃO: A estimativa teórica do número de iterações necessárias para assegurar a precisão dada, de 10^4 , comparada com a estimativa do processo iterativo simples (Jacobi), diminuiu em quase 50%.

Segunda condição suficiente

TEOREMA 4.5.3

Se o sistema linear

$$x = \alpha x + \beta$$

(4.5.3-10)

verifica a condição

$$||\alpha||_{\ell} < 1,$$

$$\text{onde } ||\alpha||_{\ell} = \max_j \sum_{i=1}^n |\alpha_{ij}|,$$

o processo de Gauss-Seidel converge para uma única solução (4.5.3-10), qualquer que seja a escolha do vetor inicial $x^{(0)}$.

DEMONSTRAÇÃO: Seja

$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{(k)} + \sum_{j=i}^n \alpha_{ij} x_j^{(k-1)} + \beta_i, \text{ com} \quad (4.5.3-11)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n) \text{ e } (k = 1, 2, \dots).$$

Para a solução exata $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, que existe e que é única, tem-se:

$$x_i = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j + \sum_{j=i}^n \alpha_{ij} x_j + \beta_i. \quad (4.5.3-12)$$

Subtraindo a (4.5.3-11) da (4.5.3-12), vem:

$$x_i - x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} (x_j - x_j^{(k)}) + \sum_{j=i}^n \alpha_{ij} (x_j - x_j^{(k-1)}).$$

Assim:

$$\left| x_i - x_i^{(k)} \right| \leq \sum_{j=1}^{i-1} \left| \alpha_{ij} \right| \left| x_j - x_j^{(k)} \right| + \sum_{j=i}^n \left| \alpha_{ij} \right| \left| x_j - x_j^{(k-1)} \right|.$$

Considerando o somatório das últimas desigualdades ,
vem:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left| x_i - x_i^{(k)} \right| &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} \left| \alpha_{ij} \right| \left| x_j - x_j^{(k)} \right| + \\ &+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \left| \alpha_{ij} \right| \left| x_j - x_j^{(k-1)} \right| \quad e \end{aligned}$$

trocando a ordem do somatório , obtem-se:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left| x_i - x_i^{(k)} \right| &\leq \sum_{j=1}^{n-1} \left| x_j - x_j^{(k)} \right| \sum_{i=j+1}^n \left| \alpha_{ij} \right| + \\ &+ \sum_{j=1}^n \left| x_j - x_j^{(k-1)} \right| \sum_{i=1}^j \left| \alpha_{ij} \right|. \end{aligned} \quad (4.5.3-13)$$

Verificação da veracidade de (4.5.3-13) para $n=3$.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{i-1} \left| \alpha_{ij} \right| \left| x_j - x_j^{(k)} \right| &= \left| \alpha_{21} \right| \left| x_1 - x_1^{(k)} \right| + \left| \alpha_{31} \right| \left| x_1 - x_1^{(k)} \right| + \\ &+ \left| \alpha_{32} \right| \left| x_2 - x_2^{(k)} \right| = \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^n |x_j - x_j^{(k)}| \sum_{i=j+1}^n |\alpha_{ij}| \quad \dots$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n |\alpha_{ij}| |x_j - x_j^{(k-1)}| = |\alpha_{11}| |x_1 - x_1^{(k-1)}| +$$

$$+ |\alpha_{12}| |x_2 - x_2^{(k-1)}| + |\alpha_{13}| |x_3 - x_3^{(k-1)}| + |\alpha_{22}| |x_2 - x_2^{(k-1)}| +$$

$$+ |\alpha_{23}| |x_3 - x_3^{(k-1)}| + |\alpha_{33}| |x_3 - x_3^{(k-1)}| \quad \dots$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n |\alpha_{ij}| |x_j - x_j^{(k-1)}| = |x_1 - x_1^{(k-1)}| |\alpha_{11}| +$$

$$+ |x_2 - x_2^{(k-1)}| [|\alpha_{12}| + |\alpha_{22}|] + |x_3 - x_3^{(k-1)}| [|\alpha_{13}| +$$

$$+ |\alpha_{23}| + |\alpha_{33}|] = \sum_{j=1}^n |x_j - x_j^{(k-1)}| \sum_{i=1}^j |\alpha_{ij}|.$$

Fazendo em (4.5.3-13)

$$s_j = \sum_{i=j+1}^n |\alpha_{ij}|, \quad t_j = \sum_{i=1}^j |\alpha_{ij}|, \text{ com}$$

$$(j = 1, 2, \dots, n-1),$$

tem-se:

$$s_n = 0, \quad t_n = \sum_{i=1}^n |\alpha_{ij}|, \quad ,$$

$$s_j + t_j = \sum_{i=1}^n |\alpha_{ij}| \leq ||\alpha||_{\ell} < 1 .$$

Assim $s_j < 1$.

A desigualdade (4.5.3-13) pode ser escrita sob a forma:

$$\sum_{i=1}^n |x_i - x_i^{(k)}| \leq \sum_{j=1}^{n-1} s_j |x_j - x_j^{(k)}| + \sum_{j=1}^n t_j |x_j - x_j^{(k-1)}|$$

ou

$$\sum_{j=1}^n (1 - s_j) |x_j - x_j^{(k)}| \leq \sum_{j=1}^n t_j |x_j - x_j^{(k-1)}|$$

(4.5.3-14)

Como

$$t_j \leq ||\alpha||_{\ell} - s_j \leq ||\alpha||_{\ell} - s_j ||\alpha||_{\ell} ,$$

$$t_j \leq ||\alpha||_{\ell} (1 - s_j) \quad (4.5.3-15)$$

Assim, substituindo a (4.5.3-15) na (4.5.3-14), vem:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n (1-S_j) |x_j - x_j^{(k)}| &\leq ||\alpha||_{\ell} \sum_{i=1}^n (1-S_j) |x_j - x_j^{(k-1)}| \leq \\ &\leq ||\alpha||_{\ell}^k \sum_{i=1}^n (1-S_j) |x_j - x_j^{(0)}|. \end{aligned} \quad (4.5.3-16)$$

Passando ao limite, quando $k \rightarrow \infty$, e levando em consideração que $||\alpha||_{\ell} < 1$, tem-se:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (1-S_j) |x_j - x_j^{(k)}| = 0.$$

Por conseguinte

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_j^{(k)} = x_j, \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

4.5.3.4 Estimativa do erro das aproximações sucessivas utilizando a ℓ -norma.

Seja

$$\sigma_{k+1} = \sum_{j=1}^n (1-S_j) |x_j^{(k+1)} - x_j^{(k)}|, \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.5.3-17)$$

Aplicando às duas iterações sucessivas $x_j^{(k)}$ e $x_j^{(k+1)}$ as transformações análogas, para obter a desi

gualdade (4.5.3-16), encontra-se:

$$\sigma_{k+1} = \rho \sigma_k, \quad (4.5.3-18)$$

onde, em virtude da desigualdade (4.5.3-15),

$$\rho = \max_j \frac{t_j}{1-S_j} \leq ||\alpha||_\ell$$

De (4.5.3-18), resulta :

$$\sigma_{k+p} = \rho^p \sigma_k, \quad (p = 1, 2, \dots) .$$

Em seguida, tem-se:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n (1-S_j) |x_j^{(k+p)} - x_j^{(k)}| &\leq \sigma_{k+p} + \sigma_{k+p-1} + \dots + \sigma_{k+1} \\ &\leq \rho^p \sigma_k + \rho^{p-1} \sigma_k + \dots + \rho \sigma_k \leq \frac{\rho \sigma_k}{1-\rho} \end{aligned}$$

Fazendo $p \rightarrow \infty$, na desigualdade anterior, vem:

$$\sum_{j=1}^n (1-S_j) |x_j - x_j^{(k)}| \leq \frac{\rho \sigma_k}{1-\rho}$$

ou:

$$\sum_{j=1}^n |x_j - x_j^{(k)}| \leq \frac{\rho}{(1-S)(1-\rho)} \sum_{j=1}^n |x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}| .$$

(4.5.3-19)

Com

$$S = \max_j S_j = \max_{i=j+1}^n \sum_{i=j+1}^n |\alpha_{ij}| .$$

Uma vez que a fórmula (4.5.3-18) ocasiona ser

$$\sigma_k \leq \rho^{k-1} \sigma_1 ,$$

a estimativa

$$||x_j - x_j^{(k)}||_{\ell} = \sum_{j=1}^n |x_j - x_j^{(k)}| \leq \frac{\rho^k}{(1-S)(1-\rho)} \sigma_1 \leq$$

$$\leq \frac{\rho^k}{(1-S)(1-\rho)} \sum_{j=1}^n |x_j^{(1)} - x_j^{(0)}| \quad (4.5.3-20)$$

é igualmente válida.

4.5.3.5 Terceira condição suficiente

TEOREMA 4.5.4

Se o sistema linear

$$x = \alpha x + \beta$$

verifica a condição

$$||\alpha||_k < 1,$$

$$\text{onde } ||\alpha||_k = \sqrt{\sum_{i,j} |\alpha_{ij}|^2},$$

o processo de Gauss-Seidel converge para a solução única, qualquer que seja a escolha do vetor inicial. [26]

Convergência do processo iterativo de Gauss-Seidel para um sistema normal.

TEOREMA 4.5.5

Para um sistema de equações normais (sistema normal), o processo de Gauss-Seidel converge, qualquer que seja a escolha do vetor inicial. [27]

ADEQUAÇÃO DA ESCALA

Ocorrem com muita freqüência, em sistemas de equações lineares,

$$Ax = b \quad (4.6.1)$$

(A de dimensão $n \times n$), diferentes ordens de magnitude para os elementos de A (ou b).

Tal fato estaria relacionado com o mau condicionamento do sistema (4.6.1) (conforme estudo detalhado feito em [28]), e por conseguinte, prejudicaria a convergência do sistema (4.6.1) ao se aplicar um dos processos iterativos abordados no presente trabalho. Pode-se uniformizar a magnitude dos elementos da matriz A e do vetor b em (4.6.1) por um dos seguintes métodos:

A) Divide-se cada elemento de uma coluna de A pela norma Euclidiana desta coluna, isto é, divide-se a j-ésima coluna de A por

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_{ij})^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{t_j} \quad (4.6.2)$$

ou multiplica-se a j-ésima coluna de A por

$$t_j = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}} ; \quad (4.6.3)$$

por outro lado, multiplica-se o vetor b por

$$t_{n+1} = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}} . \quad (4.6.4)$$

Observa-se que, ao serem efetuadas as operações acima, no sistema (4.6.1), a solução do mesmo será alterada.

As soluções y_j do sistema transformado serão escritas em função das soluções x_j do sistema original, como segue:

Seja:

$$D = \begin{bmatrix} t_1 & & & \bar{0} \\ & t_2 & & \\ & & t_3 & \\ & & & \ddots \\ \bar{0} & & & & t_n \end{bmatrix} . \quad (4.6.5)$$

Então, pode-se escrever:

$$(A \ D) \ y = t_{n+1} \ b \ . \quad (4.6.6)$$

$$y = (A \ D)^{-1} \ t_{n+1} \ b \ .$$

$$y = (D^{-1} \ A^{-1}) \ t_{n+1} \ b \ .$$

$$y = (t_{n+1} \ D^{-1}) \ A^{-1} \ b \ . \quad (4.6.7)$$

Do sistema (4.6.1), $x = A^{-1} \ b$.

Substituindo em (4.6.7), vem:

$$y = (t_{n+1} D^{-1}) x , \quad (4.6.8)$$

isto é,

$$y_j = \left(\frac{t_{n+1}}{t_j}\right) x_j , \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (4.6.9)$$

e

$$x = \frac{D}{t_{n+1}} y , \quad (4.6.10)$$

isto é,

$$x_j = \left(\frac{t_j}{t_{n+1}}\right) y_j , \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (4.6.11)$$

B) Se A for uma matriz, simétrica e definida positiva, a adequação de escala pode ser feita multiplicando-se linha e coluna i de A por $\frac{1}{|a_{ii}|^{\frac{1}{2}}}$. Aos elementos do vetor b serão feitas as transformações do método A). Seja o sistema (4.6.1), com A matriz simétrica e definida positiva.

Multiplicando à esquerda os dois lados de (4.6.1) pela matriz diagonal

$$D = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{a_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{a_{22}} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{a_{33}} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1/\sqrt{a_{nn}} \end{bmatrix} \quad (4.6.12)$$

vem:

$$D A x = D b . \quad (4.6.13)$$

Fazendo $D A = A_1$ e $D b = b_1$, a (4.6.13) é escrita:

$$A_1 x = b_1 . \quad (4.6.14)$$

O sistema (4.6.14) será modificado da seguinte maneira:

$$A_1 D y = t_{n+1} b_1 , \quad (4.6.15)$$

com t_{n+1} dado por (4.6.4).

Fazendo $A_1 D = A^*$ e $t_{n+1} b_1 = b^*$, o sistema (4.6.15) pode ser escrito:

$$A^* y = b^* \quad (4.6.16)$$

É fácil verificar que:

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & a_{12}/\sqrt{a_{11} a_{22}} & a_{13}/\sqrt{a_{11} a_{33}} \dots a_{1n}/\sqrt{a_{11} a_{nn}} \\ a_{21}/\sqrt{a_{22} a_{11}} & 1 & a_{23}/\sqrt{a_{22} a_{33}} \dots a_{2n}/\sqrt{a_{22} a_{nn}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}/\sqrt{a_{nn} a_{11}} & a_{n2}/\sqrt{a_{nn} a_{22}} \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (4.6.17)$$

e

$$b^* = \left[t b_1/\sqrt{a_{11}} \quad t b_2/\sqrt{a_{22}} \dots t b_n/\sqrt{a_{nn}} \right]^T. \quad (4.6.18)$$

Como o que interessa é a solução do sistema original (4.6.1), deve-se encontrar uma relação entre as soluções dos sistemas (4.6.1) e (4.6.16).

De (4.6.16), obtem-se:

$$y = (A^*)^{-1} b^*$$

e, como $A^* = A_1 D$ e $b^* = t_{n+1} b_1$, vem:

$$y = (A_1 D)^{-1} t_{n+1} b_1 \dots$$

$$y = (D^{-1} A_1^{-1}) t_{n+1} b_1 \rightarrow$$

$$y = (D^{-1} A_1^{-1} b_1) t_{n+1} .$$

Mas, da (4.6.14) , $A_1^{-1} b_1 = x .$

Logo:

$$y = (D^{-1} x) t_{n+1} \quad (4.6.19)$$

e

$$x = \frac{D y}{t_{n+1}} . \quad (4.6.20)$$

A (4.6.17) mostra que a matriz $(a_{ij}^*) = A^*$ é formada de maneira tal que os elementos diagonais são unitários e os não diagonais estão compreendidos entre os valores -1 e $+1$.

Este fato assegura uma convergência mais rápida para os processos iterativos aplicados ao sistema (4.6.16).

CAPÍTULO V

E X P E R I Ê N C I A S

5.1 RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES NORMAIS DADO EM | 29 | DE DIMENSÃO N=12 k=NÚMERO DE
ITERAÇÕES CPU(s) PRECISÃO DUPLA X=VETOR SOLUÇÃO PRECISÃO EXIGIDA PARA A k-ésima ITE-
RAÇÃO = 10^{-7}

MÉTODO X	*1	2 k=133 CPU=0.79	3 k=104 CPU=2.40	4 k=166 CPU=0.97	5 k=10 CPU=0.17
01	0.8122151	0.8122157	0.8122317	0.8122143	0.8122151
02	2.1134494	2.1134486	2.1134301	2.1134503	2.1134494
03	- 0.5451456	- 0.5451450	- 0.5451307	- 0.5451462	- 0.5451456
04	0.6188175	0.6188168	0.6188022	0.6188181	0.6188175
05	- 1.3025592	- 1.3025597	- 1.3025728	- 1.3025586	- 1.3025592
06	- 0.0202016	- 0.0202021	- 0.0202123	- 0.0202012	- 0.0202016
07	- 0.7968314	- 0.7968309	- 0.7968199	- 0.7968319	- 0.7968314
08	2.1477578	2.1477576	2.1477519	2.1477581	2.1477578
09	- 0.8108782	- 0.8108777	- 0.8108648	- 0.8108788	- 0.8108782
10	- 1.5670869	- 1.5670869	- 1.5670865	- 1.5670869	- 1.5670869
11	- 1.4152795	- 1.4152796	- 1.4152809	- 1.4152794	- 1.4152795
12	0.2361117	0.2361115	0.2361059	0.2361120	0.2361117

MÉTODO X	6 k=9 CPU=0.18	7 k=10 CPU=0.13	8 k=23 w=1.50	9 k=32 w=1.50
01	0.8122151	0.8122151	0.8122125	0.8122150
02	2.1134494	2.1134494	2.1134527	2.1134495
03	- 0.5451456	- 0.5451456	- 0.5451479	- 0.5451457
04	0.6188175	0.6188175	0.6188198	0.6188175
05	- 1.3025592	- 1.3025592	- 1.3025575	- 1.3025591
06	- 0.0202016	- 0.0202016	- 0.0202000	- 0.0202016
07	- 0.7968314	- 0.7968314	- 0.7968333	- 0.7968314
08	2.1477578	2.1477578	2.1477596	2.1477578
09	- 0.8108782	- 0.8108782	- 0.8108806	- 0.8108783
10	- 1.5670869	- 1.5670869	- 1.5670871	- 1.5670869
11	- 1.4152795	- 1.4152795	- 1.4152792	- 1.4152795
12	0.2361117	0.2361117	0.2361127	0.2361118

- *1 - MÉTODO DIRETO. SOLUÇÃO OBTIDA PELA APLICAÇÃO $X = A^{-1}B$ NO DEC-SYSTEM-10
- 2 - GAUSS-SEIDEL VALORES INICIAIS $X(I)=0$, $I=1,2,\dots,N$
- 3 - GAUSS-SEIDEL COM ADEQUAÇÃO DE ESCALA VALORES INICIAIS $X(I)=0$
- 4 - GAUSS-SEIDEL VALORES INICIAIS $X(I)=B(I)$, (VETOR DOS TERMOS INDEPENDENTES)
- 5 - GRADIENTES CONJUGADOS - VALORES INICIAIS $X(I)=0$ ALGORITMO COMPLETO
- 6 - GRADIENTES CONJUGADOS COM ADEQUAÇÃO DE ESCALA, VALORES INICIAIS $X(I)=0$
- 7 - GRADIENTES CONJUGADOS - ALGORITMO SIMPLIFICADO, VALORES INICIAIS $X(I)=0$
- 8 - S.O.R. COM ADEQUAÇÃO DE ESCALA w =MELHOR FATOR DE ACELERAÇÃO
- 9 - S.O.R.

X	MÉTODO	*1	2 k=346 CPU=9.44	3 k=307 CPU=35.49	4 k=465 CPU=12.66	5 k=37 CPU=1.27
01	-	0.3393157	- 0.3393128	- 0.3393050	- 0.3393186	- 0.3393157
02		0.1131377	0.1131374	0.1131365	0.1131381	0.1131377
03	-	0.7345354	- 0.7345356	- 0.7345363	- 0.7345352	- 0.7345354
04	-	0.4648372	- 0.4648349	- 0.4648290	- 0.4648394	- 0.4648372
05	-	0.7010457	- 0.7010456	- 0.7010451	- 0.7010459	- 0.7010457
06		0.3742700	0.3742701	0.3742703	0.3742700	0.3742700
07	-	0.5064076	- 0.5064060	- 0.5064017	- 0.5064092	- 0.5064076
08	-	0.0095564	- 0.0095564	- 0.0095564	- 0.0095564	- 0.0095564
09	-	0.8920069	- 0.8920065	- 0.8920053	- 0.8920074	- 0.8920069
10	-	0.2686477	- 0.2686462	- 0.2686423	- 0.2686492	- 0.2686477
11	-	0.0565913	- 0.0565910	- 0.0565900	- 0.0565916	- 0.0565913
12	-	0.4644242	- 0.4644240	- 0.4644235	- 0.4644244	- 0.4644242
13	-	0.3368476	- 0.3368469	- 0.3368452	- 0.3368482	- 0.3368476
14	-	0.2878566	- 0.2878557	- 0.2878534	- 0.2878575	- 0.2878566
15	-	0.3672909	- 0.3672898	- 0.3672868	- 0.3672921	- 0.3672909
16	-	0.5237077	- 0.5237067	- 0.5237039	- 0.5237088	- 0.5237077
17		0.1684415	0.1684409	0.1684393	0.1684421	0.1684415
18		0.0137589	0.0137589	0.0137590	0.0137589	0.0137589
19	-	0.0182379	- 0.0182379	- 0.0182379	- 0.0182379	- 0.0182379
20		0.0695084	0.0695084	0.0695083	0.0695085	0.0695084
21	-	0.0119981	- 0.0119981	- 0.0119980	- 0.0119981	- 0.0119981
22	-	0.0896189	- 0.0896189	- 0.0896189	- 0.0896189	- 0.0896189
23	-	0.0639043	- 0.0639042	- 0.0639038	- 0.0639045	- 0.0639043
24		0.2964744	0.2964726	0.2964679	0.2964762	0.2964744
25		0.1241639	0.1241638	0.1241638	0.1241639	0.1241639
26	-	0.0168632	- 0.0168627	- 0.0168613	- 0.0168638	- 0.0168632
27	-	0.0162806	- 0.0162807	- 0.0162811	- 0.0162804	- 0.0162806

X \ MÉTODO	6		7		8		9	
	k=28	CPU=1.06	k=38	CPU=1.38	k=56	w=1.60	k=62	w=1.60
01	-	0.3393157	-	0.3393157	-	0.3393168	-	0.3393158
02		0.1131377		0.1131377		0.1131377		0.1131377
03	-	0.7345354	-	0.7345354	-	0.7345354	-	0.7345354
04	-	0.4648372	-	0.4648372	-	0.4648381	-	0.4648373
05	-	0.7010457	-	0.7010457	-	0.7010460	-	0.7010458
06		0.3742700		0.3742700		0.3742700		0.3742700
07	-	0.5064076	-	0.5064076	-	0.5064084	-	0.5064077
08	-	0.0095564	-	0.0095564	-	0.0095565	-	0.0095564
09	-	0.8920069	-	0.8920069	-	0.8920073	-	0.8920070
10	-	0.2686477	-	0.2686477	-	0.2686484	-	0.2686478
11	-	0.0565913	-	0.0565913	-	0.0565915	-	0.0565913
12	-	0.4644242	-	0.4644242	-	0.4644244	-	0.4644242
13	-	0.3368476	-	0.3368476	-	0.3368480	-	0.3368477
14	-	0.2878566	-	0.2878566	-	0.2878571	-	0.2878567
15	-	0.3672909	-	0.3672909	-	0.3672915	-	0.3672910
16	-	0.5237077	-	0.5237077	-	0.5237083	-	0.5237078
17		0.1684415		0.1684415		0.1684418		0.1684415
18		0.0137589		0.0137589		0.0137589		0.0137589
19	-	0.0182379	-	0.0182379	-	0.0182379	-	0.0182379
20		0.0695084		0.0695084		0.0695084		0.0695084
21	-	0.0119981	-	0.0119981	-	0.0119981	-	0.0119981
22	-	0.0896189	-	0.0896189	-	0.0896189	-	0.0896189
23	-	0.0639043	-	0.0639043	-	0.0639044	-	0.0639043
24		0.2964744		0.2964744		0.2964752		0.2964745
25		0.1241639		0.1241639		0.1241640		0.1241639
26	-	0.0168632	-	0.0168632	-	0.0168634	-	0.0168632
27	-	0.0162806	-	0.0162806	-	0.0162806	-	0.0162806

* SOLUÇÃO OBTIDA PELA APLICAÇÃO DO MÉTODO DIRETO $X=A^{-1}B$ NO DEC-SYSTEM-10.

Observação: A aplicação do método de Jacobi aos sistemas indicados nos parágrafos 5.1 e 5.2 apresentou divergências.

5.3

APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS GRADIENTES CONJUGADOS PARTINDO DAS EQUAÇÕES DE CONDIÇÃO DADAS EM |31| PARA O CÁLCULO DO VETOR DAS CORREÇÕES

APLICAÇÃO DO PROGRAMA 12

v = vetor das correções

V	RESULTADOS DE 31	PROGRAMA 12	V	RESULTADOS DE 31	PROGRAMA 12
01	0.287	0.2867	31	- 0.396	- 0.3959
02	- 0.201	- 0.2011	32	- 0.472	- 0.4724
03	- 0.086	- 0.0856	33	0.676	0.6774
04	- 0.054	- 0.0545	34	- 0.342	- 0.3425
05	0.176	0.1756	35	- 0.077	- 0.0774
06	- 0.121	- 0.1211	36	0.219	0.2190
07	0.430	0.4297	37	- 0.476	- 0.4755
08	0.041	0.0409	38	0.096	0.0954
09	- 0.302	- 0.3023	39	0.184	0.1848
10	0.058	0.0585	40	- 0.049	- 0.0492
11	- 0.227	- 0.2268	41	- 0.231	- 0.2310
12	- 0.008	- 0.0077	42	0.554	0.5536
13	0.415	0.4153	43	- 0.516	- 0.5168
14	0.341	0.3409	44	0.133	0.1322
15	- 0.370	- 0.3704	45	- 0.310	- 0.3079
16	- 0.378	- 0.3782	46	0.298	0.2982
17	0.462	0.4617	47	- 0.159	- 0.1593
18	0.010	0.0096	48	0.028	0.0278
19	- 0.158	- 0.1578	49	0.219	0.2189
20	0.068	0.0679	50	0.056	0.0542
21	- 0.381	- 0.3814	51	0.154	0.1549
22	0.430	0.4300	52	- 0.456	- 0.4559
23	- 0.271	- 0.2710	53	0.161	0.1606
24	0.300	0.2996	54	0.067	0.0667
25	- 0.054	- 0.0545	55	- 0.227	- 0.2272
26	- 0.404	- 0.4041	56	0.571	0.5706
27	- 0.358	- 0.3593	57	0.086	0.0859
28	0.615	0.6152	58	- 0.657	- 0.6565
29	0.421	0.4219			
30	0.190	0.1905			

5.4

APLICAÇÃO DOS MÉTODOS GRADIENTES CONJUGADOS PARA O AJUSTAMENTO A PARTIR DAS EQUAÇÕES DE OBSERVAÇÃO. APLICAÇÃO A UM SISTEMA DE DIMENSÃO 67×24 | 32 |

X= VETOR SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES NORMAIS

k=NÚMERO DE ITERAÇÕES

X	RESULTADOS OBTIDOS NA HP-30 POR 33 MÉTODO DIRETO	PROGRAMA 9 k = 21 CPU = 0.94 s	PROGRAMA 11 k = 61 CPU = 5.08 s	PROGRAMA 10 k = 644 CPU = 1 ^m 10:46s
01	- 0.005	- 0.00496	- 0.00496	- 0.00494
02	- 0.003	- 0.00331	- 0.00320	- 0.00327
03	- 0.005	- 0.00516	- 0.00502	- 0.00511
04	- 0.042	- 0.04205	- 0.04194	- 0.04200
05	- 0.159	- 0.15864	- 0.15870	- 0.15859
06	- 0.221	- 0.22131	- 0.22131	- 0.22127
07	- 0.297	- 0.29688	- 0.29702	- 0.29685
08	- 0.255	- 0.25455	- 0.25461	- 0.25453
09	- 0.106	- 0.10612	- 0.10625	- 0.10611
10	- 0.150	- 0.14950	- 0.14970	- 0.14950
11	- 0.105	- 0.10448	- 0.10453	- 0.10449
12	- 0.226	- 0.22615	- 0.22647	- 0.22617
13	- 0.319	- 0.31857	- 0.31871	- 0.31859
14	- 0.278	- 0.27748	- 0.27753	- 0.27750
15	- 0.211	- 0.21049	- 0.21068	- 0.21051
16	- 0.080	- 0.07962	- 0.07988	- 0.07964
17	- 0.036	- 0.03612	- 0.03629	- 0.03612
18	0.066	0.06591	0.06598	0.06591
19	0.094	0.09366	0.09375	0.09366
20	0.033	0.03313	0.03310	0.03314
21	0.028	0.02792	0.02783	0.02792
22	0.000102921	0.000103531	0.0001026	0.000103464
23	- 0.000802027	- 0.000801395	- 0.0008022	- 0.000801455
24	- 0.000920910	- 0.000919661	- 0.0009205	- 0.000919746

5.5

APLICAÇÃO DO PROGRAMA 13

RESULTADO DA MATRIZ TRIANGULAR INFERIOR INVERSA DA MATRIZ NORMAL DADA EM |34|

0.916												
-0.628	1.057											
0.464	-0.542	0.752										
-0.452	0.550	-0.430	0.784									
-0.389	0.477	-0.382	0.403	0.700								
-0.290	0.372	-0.299	0.321	0.292	0.573							
0.346	-0.415	0.321	-0.333	-0.295	-0.237	0.583						
-0.120	0.219	-0.168	0.203	0.175	0.171	-0.156	0.573					
0.451	-0.533	0.420	-0.435	-0.389	-0.320	0.336	-0.223	0.513				
-0.016	-0.022	0.015	-0.030	-0.024	-0.034	0.023	-0.087	0.027	0.041			
-0.125	0.076	-0.041	0.013	0.002	-0.020	-0.017	-0.089	-0.021	0.051	0.104		
-0.198	0.237	-0.184	0.191	0.171	0.132	-0.139	0.070	-0.165	-0.008	0.013	0.086	

CAPÍTULO VI

C O N C L U S ã O

Uma análise dos resultados das experiências apresentadas no Capítulo V, permite-nos concluir o que se segue.

O método de Jacobi não apresentou convergência para a solução dos sistemas nas experiências 5.1 e 5.2. Em um teste feito com um sistema de equações normais de dimensão 4 [35], o mesmo apresentou convergência em 15 iterações, com a precisão exigida de 10^{-7} .

Houve convergência com a aplicação do método de Gauss-Seidel nas experiências 5.1 e 5.2. Tal fato está descrito no teorema 4.5.5 que afirma: Para um sistema de equações normais, o processo de Gauss-Seidel converge, qualquer que seja a escolha do vetor inicial. Comparamos os quadros 2, 3 e 4 com o quadro 1 nas experiências 5.1 e 5.2 e comprovamos:

- a. As soluções encontradas nos quadros 2, 3 e 4 coincidem até a quarta casa decimal com a solução apresentada no quadro 1, que foi obtida pela aplicação do método direto $X = A^{-1}B$ no DEC SYSTEM-10.

- b. Na experiência 5.1, comparando as soluções dos quadros 2 e 4, verificamos que para 2 ocorreu convergência após 133 iterações com um tempo, de CPU, de 0.79 s ao passo que para 4 houve convergência após 166 iterações, com um tempo, de CPU, de 0,97 s.

A experiência 5.2 apresenta o quadro 2 com convergência estabelecida após 346 iterações, com 9.44 s de CPU, e para o quadro 4 houve convergência após 465 iterações, com 12.66 s. Estas defasagens em tempo de execução, podem ser explicadas facilmente : Nos quadros 2, consideramos os valores iniciais das variáveis como todos nulos $X(I) = 0$, $I=1,2,3,\dots,N$; ao passo que nos quadros 4 foram considerados como valores iniciais os termos independentes $X(I) = B(I)$, $I=1,2,3,\dots,N$ dos sistemas de equações normais. Analisando as soluções obtidas para ps dois sistemas, verificamos que as mesmas estão mais próximas dos valores iniciais nulos do que dos valores iniciais considerados como os termos independentes dos sistemas de equações normais. Isto evidencia o fato de que quanto mais próximos da solução do sistema de equações lineares são considerados os valores iniciais, menor será o número de iterações e por conseguinte, menor será o tempo de cálculo para se atingir a convergência.

Nas experiências 5.1 e 5.2 ao se comparar os quadros 2 (Método de Gauss-Seidel) e 3 (Método de

Gauss-Seidel aplicado aos sistemas de equações normais após se introduzir "adequação de escala") verificamos que o número de iterações diminuiu com a introdução de "adequação de escala" aos sistemas, mas, por outro lado, o tempo de CPU aumentou consideravelmente. Na experiência 5.1, o número de iterações diminuiu de 133 para 104. No entanto, o CPU aumentou de 0.79 para 2.40 s. Na experiência 5.2, houve um decréscimo no número de iterações de 346 para 307 iterações e um acréscimo no tempo de CPU de 9.44 para 35.49 s. Assim sendo, a "adequação de escala" apresentada no presente trabalho, não se mostra vantajosa no caso de aplicação do método de Gauss-Seidel.

Ainda nas experiências 5.1 e 5.2, comparamos os quadros 1, 5, 6 e 7 e comprovamos:

- a. Todos os resultados coincidiram integralmente até a sétima casa decimal, que foi a precisão exigida.
- b. Ao se introduzir "adequação de escala" aos sistemas, de um modo geral decresce o número de iterações e também o tempo de CPU.

Isto pode ser comprovado. Na experiência 5.1 ao se aplicar o método iterativo dos gradientes conjugados, utilizando o algoritmo completo, obtivemos convergência com 10 iterações e um tempo de CPU de 0.17 s conforme o quadro 5. Para a experiência 5.2 a convergência foi obtida com 37 iterações para 1.27 s de

CPU. Com a introdução de "adequação de escala" aos sistemas, na experiência 5.1, o número de iterações passou a ser 9 e o tempo de CPU 0.18 s e, na experiência 5.2, o número de iterações foi de 28, para um tempo de CPU de 1.06 s.

Resolvemos dois sistemas de equações normais pelo método iterativo S.O.R. e encontramos:

- a. Convergência estabelecida com o melhor fator de aceleração $w = 1.50$, após 32 iterações no sistema da experiência 5.1.
- b. Convergência estabelecida com o melhor fator de aceleração $w = 1.60$, após 62 iterações no sistema da experiência 5.2.

Aplicando o método S.O.R., com "adequação de escala" aos sistemas, o número de iterações foi de 23 na experiência 5.1 e 56 na experiência 5.2.

O CPU, no método S.O.R., não foi computado para efeitos comparativos com os métodos de Gauss-Seidel e gradientes conjugados, em razão de que, nos programas do presente trabalho, a procura do melhor fator de aceleração w ter sido feita por tentativas, fazendo w variar de 0,1 em 0,1, no intervalo compreendido entre 0,1 e 1,9.

Podemos concluir que o método iterativo que

lhora se comporta na solução de sistemas de equações normais é o método dos gradientes conjugados, seja pela constância dos resultados ou pelo número de iterações e tempo de processamento (CPU), que é um fator de real importância no que se refere ao uso de computadores.

O método de Gauss-Seidel pode ser sempre usado para se resolver um sistema de equações normais. No entanto, ao ser comparado com o método dos gradientes conjugados, devemos dar prioridade à este, pelos motivos já expostos.

Como já foi citado no parágrafo 4.3, o método S.O.R. não é muito desejável na prática por motivo das dificuldades em se obter o melhor fator de aceleração ω .

O método iterativo de Jacobi raramente pode ser aplicado a um sistema de equações normais, exceção feita aos sistemas que verificam as condições de convergência dos parágrafos 4.5.1 e 4.5.2, o que dificilmente ocorre na prática.

A P Ê N D I C EP R O G R A M A S (F O R T R A N)

PROGRAMA 1

```

C      METODO ITERATIVO DE JACOBI
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION A(78),B(12),X(12),X0(12)
C      LEITURA DA MATRIZ DOS COEFICIENTES
      READ(2,10)(A(I),I=1,78)
10     FORMAT(15G)
C      LEITURA DO VETOR DOS TERMOS INDEPENDENTES
      READ(2,20)(B(I),I=1,12)
20     FORMAT(12G)
C      VALORES DE EPSILON, MAXIMO E ENE
      EPS=0.0000001
      MAX=1000
      N=12
C      VALORES ARBITRARIOS INICIAIS
      DO 30 I=1,N
      X0(I)=B(I)
30     CONTINUE
C      INICIO DO CICLO ITERATIVO
      ITER=0
40     ITER=ITER+1
      DO 70 I=1,N
      SOMA=0.0
      DO 60 J=1,N
      IF(J-I)50,60,50
50     CALL LOC(I,J,IJ,N,N,1)
      SOMA=SOMA+A(IJ)*X0(J)
60     CONTINUE
      CALL LOC(I,I,II,N,N,1)
      X(I)=(B(I)-SOMA)/A(II)
70     CONTINUE
C      TESTE DE CONVERGENCIA
      DO 80 I=1,N
      DIF=ABS(X(I)-X0(I))
      IF(DIF-EPS)80,80,100
80     CONTINUE
C      SOLUCAO DO SISTEMA
      WRITE(5,84) ITER
84     FORMAT(1H1,10X,'SOLUCAO DO SISTEMA COM CONVER
      1GENCIA ESTABELECID APOS 'I4' ITERACOES')
160    DO 90 I=1,N
      WRITE(5,85) I,X(I)
85     FORMAT(/,15X,'X('I3')=' ,E16.9)
90     CONTINUE
      GO TO 140
100    DO 110 I=1,N
      X0(I)=X(I)
110    CONTINUE
      IF(ITER-MAX)40,120,120
120    WRITE(5,130) ITER
130    FORMAT(/,10X,'TERMINO COM CONVERGENCIA NAO
      2ESTABELECID APOS 'I5' ITERACOES')
      GO TO 160
140    STOP
      END

```

PROGRAMA 2

```

C      METODO ITERATIVO DE GAUSS SEIDEL
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION A(378),B(27),X(27)
C      LEITURA DA MATRIZ DOS COEFICIENTES
      READ(2,10) (A(I),I=1,378)
10     FORMAT(10G)
C      LEITURA DO VETOR DOS TERMOS INDEPENDENTES
      READ(2,20) (B(I),I=1,27)
20     FORMAT(10G)
C      VALORES DE EPSILON, MAXIMO E ENE
      EPS=0.0000001
      MAX=2700
      N=27
C      VALORES ARBITRARIOS INICIAIS
      DO 40 I=1,N
40     X(I)=B(I)
C      INICIO DO CICLO ITERATIVO
      ITER=0
50     ITER=ITER+1
      BIG=0.0
      DO 100 I=1,N
      SOMA=0.0
      DO 80 J=1,N
      IF(J-I)60,80,60
60     CALL LOC(I,J,IJ,N,N,1)
      SOMA=SOMA+A(IJ)*X(J)
80     CONTINUE
      CALL LOC(I,I,II,N,N,1)
      TEMP=(B(I)-SOMA)/A(II)
      DIF=ABS((X(I)-TEMP))
      IF(DIF-BIG)90,90,85
85     BIG=DIF
90     X(I)=TEMP
100    CONTINUE
C      TESTE DE CONVERGENCIA
      IF(BIG-EPS)150,110,110
110    IF(ITER-MAX)50,120,120
120    WRITE(5,130)
130    FORMAT(1H1,'VALOR DE BIG')
      WRITE(5,140)BIG
140    FORMAT(G)
      WRITE(5,145)
145    FORMAT(/,10X,'TERMINO COM CONVERGENCIA
      5 NAO ESTABELECID')
      GO TO 200
150    WRITE(5,170) ITER
170    FORMAT(1H1,10X,'SOLUCAO DO SITEMA COM CONVER
      1GENCIA ESTABELECID APOS 'I4' ITERACOES')
      DO 190 I=1,N
      WRITE(5,180) I,X(I)
180    FORMAT(/,15X,'X('I3')=' ,F10.7)
190    CONTINUE
200    STOP
      END

```

PROGRAMA 3

```

C      METODO ITERATIVO DE GAUSS SEIDEL
C      COM A UTILIZACAO DE ADEQUACAO DE ESCALA
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION A(378),B(27),X(27),Y(27)
C      LEITURA DA MATRIZ DOS COEFICIENTES
      READ(2,10) (A(I),I=1,378)
10     FORMAT(10G)
C      LEITURA DO VETOR DOS TERMOS INDEPENDENTES
      READ(2,20) (B(I),I=1,27)
20     FORMAT(10G)
C      VALORES DE EPSILON, MAXIMO E ENE
      EPS=0.0000001
      MAX=2700
      N=27
C      CALCULO DO INVERSO DA NORMA DO VETOR DOS TERMOS
C      INDEPENDENTES
      SIGMA=0.0
      DO 30 I=1,N
      SIGMA=SIGMA+B(I)**2
30     CONTINUE
      XNORM=SQRT(SIGMA)
      T=1/XNORM
C      VALORES ARBITRARIOS INICIAIS
      DO 40 I=1,N
40     Y(I)=0
C      INICIO DO CICLO ITERATIVO
      ITER=0
50     ITER=ITER+1
      BIG=0.0
      DO 100 I=1,N
      SOMA=0.0
      DO 80 J=1,N
      IF(J-I)60,80,60
60     CALL LOC(I,J,IJ,N,N,1)
      CALL LOC(I,I,II,N,N,1)
      CALL LOC(J,J,JJ,N,N,1)
      SOMA=SOMA+(A(IJ)/SQRT(A(II)*A(JJ)))*Y(J)
80     CONTINUE
      CALL LOC(I,I,II,N,N,1)
      TEMP=(T*B(I))/SQRT(A(II))-SOMA
      DIF=ABS((Y(I)-TEMP))
      IF(DIF-BIG)90,90,85
85     BIG=DIF
90     Y(I)=TEMP
100    CONTINUE
C      TESTE DE CONVERGENCIA
      IF(BIG-EPS)150,110,110
110    IF(ITER-MAX)50,120,120
120    WRITE(5,130)
130    FORMAT(1H1,'VALOR DE BIG')
      WRITE(5,140)BIG
140    FORMAT(G)
      WRITE(5,145)
145    FORMAT(/,10X,'TERMINO COM CONVERGENCIA
      5 NAO ESTABELECID')
      GO TO 200
C      OBTENCAO DA SOLUCAO DO SITEMA COM A FORMULA
C      DE RECORRENCIA

```

```
150      DO 160 I=1,N
        CALL LOC(I,I,II,N,N,1)
        X(I)=XNORM*Y(I)/SQRT(A(II))
160      CONTINUE
        WRITE(5,170) ITER
170      FORMAT(1H1,10X,'SOLUCAO DO SITEMA COM CONVER
        6GENCIA ESTABELECIDADA AP0S 'I4' ITERACOES')
        DO 190 I=1,N
        WRITE(5,180) I,X(I)
180      FORMAT(/,15X,'X('I3')= ',F10.7)
190      CONTINUE
200      STOP
        END
```



```

C----- METODO ITERATIVO S.O.R.
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION A(10),B(4),X(4)
C      LEITURA DA MATRIZ DOS COEFICIENTES
      READ(2,10) (A(I),I=1,10)
10     FORMAT(10G)
C      LEITURA DO VETOR DOS TERMOS INDEPENDENTES
      READ(2,20) (B(I),I=1,4)
20     FORMAT(4G)
C      VALORES DE EPSILON, MAXIMO E ENE
      EPS=0.0000001
      MAX=700
      N=4
C      VARIACAO DO FATOR DE ACELERACAO W DE 0.1 EM 0.1
      DO 190 L=2,20
      XW=L-1
      W=XW/10.0
      WRITE(5,25) W
25     FORMAT(/,5X,'SOLUCAO DO SISTEMA PARA O FATOR W='F5.2)
C      VALORES ARBITRARIOS INICIAIS
      DO 40 I=1,N
40     X(I)=0
C      INICIO DO CICLO ITERATIVO
      ITER=0
50     ITER=ITER+1
      BIG=0.0
      DO 100 I=1,N
      SOMA=0.0
      DO 80 J=1,N
      IF(J-I)60,80,60
60     CALL LOC(I,J,IJ,N,N,1)
      SOMA=SOMA+A(IJ)*X(J)
80     CONTINUE
      CALL LOC(I,I,II,N,N,1)
      TEMP=(B(I)-SOMA)/A(II)
      XTEMP=W*(TEMP-X(I))
      XNOVO=X(I)+XTEMP
      DIF=ABS((X(I)-XNOVO))
      IF(DIF-BIG)90,90,85
85     BIG=DIF
90     X(I)=XNOVO
100    CONTINUE
C      TESTE DE CONVERGENCIA
      IF(BIG-EPS)150,110,110
110    IF(ITER-MAX)50,120,120
120    WRITE(5,130)
130    FORMAT(1H1,'VALOR DE BIG')
      WRITE(5,140)BIG
140    FORMAT(G)
      WRITE(5,145) MAX
145    FORMAT(/,10X,'TERMINO DO ESTAGIO COM CONVERGENCIA
1      NAO ESTABELECID APOS 'I5' ITERACOES')
      GO TO 190
150    WRITE(5,170) ITER
170    FORMAT(/,5X,'CONVERGENCIA ESTABELECID A
1      APOS 'I4' ITERACOES')
      WRITE(5,180)(I,X(I),I=1,N)
180    FORMAT(3(4X,'X('I3') =' ,F10.7))
190    CONTINUE
      STOP
      END

```

PROGRAMA 5

```

C----- METODO ITERATIVO S.O.R. COM ADEQUACAO DE ESCALA
          IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
          DIMENSION A(78),B(12),X(12),Y(12)
C          LEITURA DA MATRIZ DOS COEFICIENTES
          READ(2,10) (A(I),I=1,78)
10         FORMAT(15G)
C          LEITURA DO VETOR DOS TERMOS INDEPENDENTES
          READ(2,20) (B(I),I=1,12)
20         FORMAT(12G)
C          VALORES DE EPSILON, MAXIMO E ENE
          EPS=0.0000001
          MAX=300
          N=12
C          VARIACAO DO FATOR DE ACELERACAO W DE 0.1 EM 0.1
          DO 190 L=2,20
            XW=L-1
            W=XW/10.0
            WRITE(5,25) W
25         FORMAT(/,5X,'SOLUCAO DO SISTEMA PARA O FATOR W='F5.2)
C          CALCULO DO INVERSO DA NORMA DO VETOR DOS TERMOS
C          INDEPENDENTES
          SIGMA=0.0
          DO 30 I=1,N
            SIGMA=SIGMA+B(I)**2
30         CONTINUE
          XNORM=SQRT(SIGMA)
          T=1/XNORM
C          VALORES ARBITRARIOS INICIAIS
          DO 40 I=1,N
40         Y(I)=0
C          INICIO DO CICLO ITERATIVO
          ITER=0
50         ITER=ITER+1
          BIG=0.0
          DO 100 I=1,N
            SOMA=0.0
            DO 80 J=1,N
              IF(J-I)60,80,60
60             CALL LOC(I,J,IJ,N,N,1)
              CALL LOC(I,I,II,N,N,1)
              CALL LOC(J,J,JJ,N,N,1)
              SOMA=SOMA+(A(IJ)/SQRT(A(II)*A(JJ)))*Y(J)
80            CONTINUE
            CALL LOC(I,I,II,N,N,1)
            TEMP=(T*B(I))/SQRT(A(II))-SOMA
            YTEMP=W*(TEMP-Y(I))
            YNOVO=Y(I)+YTEMP
            DIF=ABS((Y(I)-YNOVO))
            IF(DIF-BIG)90,90,85
85           BIG=DIF
90           Y(I)=YNOVO
100          CONTINUE
C          TESTE DE CONVERGENCIA
          IF(BIG-EPS)150,110,110
110         IF(ITER-MAX)50,120,120
120        WRITE(5,130)

```

```
130   FORMAT(1H1,'VALOR DE BIG')
      WRITE(5,140)BIG
140   FORMAT(G)
      WRITE(5,145) MAX
145   FORMAT(/,10X,'TERMINO DO ESTAGIO COM CONVERGENCIA
1   NAO ESTABELECID APOS '15' ITERACOES')
      GO TO 190
C     OBTENCAO DA SOLUCAO DO SITEMA COM A FORMULA DE
C     RECORRENCIA
150   DO 160 I=1,N
      CALL LOC(I,I,II,N,N,1)
      X(I)=XNORM*Y(I)/SQRT(A(II))
160   CONTINUE
      WRITE(5,170) ITER
170   FORMAT(/,5X,'CONVERGENCIA ESTABELECID A
1   APOS '14' ITERACOES')
      WRITE(5,180)(I,X(I),I=1,N)
180   FORMAT(3(4X,'X('13') =',F10.7))
190   CONTINUE
      STOP
      END
```

PROGRAMA 6

```

C      METODO ITERATIVO DOS GRADIENTES CONJUGADOS
C      COM A APLICACAO DO ALGORITMO COMPLETO
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION A(378),B(27),X(27),R(27),S(27),H(27)
      1,D(27),U(27),C(27)
C      NUMERO DE EQUACOES E PRECISAO EXIGIDA
      N=27
      EPS=0.0000001
C      LEITURA DA MATRIZ DOS COEFICIENTES
      READ(2,10) (A(I),I=1,378)
10     FORMAT(10G)
C      LEITURA DO VETOR DOS TERMOS INDEPENDENTES
      READ(2,20) (B(I),I=1,27)
20     FORMAT(10G)
C      VALORES ARBITRARIOS INICIAIS
      DO 30 I4=1,N
30     X(I4)=0
C      CALCULO DOS RESIDUOS INICIAIS R(0) E DO VETOR H(1)
      DO 50 I=1,N
      C(I)=0
      DO 40 J=1,N
      CALL LOC(I,J,IJ,N,N,1)
      C(I)=C(I)+A(IJ)*X(J)
40     CONTINUE
      R(I)=B(I)+C(I)
      H(I)=-R(I)
C      APOS O COMANDO SEGUINTE S= TRANSPOSTA DE R
      S(I)=R(I)
C      APOS O COMANDO SEGUINTE U= TRANSPOSTA DE H
      U(I)=H(I)
50     CONTINUE
C      INICIO DO CICLO ITERATIVO
      ITER=0
60     ITER=ITER+1
      E1=0
      T1=0
      DO 80 I=1,N
      D(I)=0
      DO 70 J=1,N
      CALL LOC(I,J,IJ,N,N,1)
      D(I)=D(I)+A(IJ)*H(J)
70     CONTINUE
      T1=T1+S(I)*H(I)
      E1=E1+U(I)*D(I)
80     CONTINUE
C      NA DECLARACAO SEGUINTE E CALCULADO LAMBDA
      A1=-(T1/E1)
C      SOLUCAO DO SISTEMA
      DO 90 I=1,N
      X(I)=X(I)+A1*H(I)
C      CALCULO DOS RESIDUOS R(I)
      R(I)=R(I)+A1*D(I)
      S(I)=R(I)
90     CONTINUE
      V1=0
      DO 100 I=1,N
      V1=V1+S(I)*D(I)

```

```
100    CONTINUE
C      CALCULO DO QUOCIENTE EPSILON(K)
      B1=V1/E1
C      CALCULO DE H(K+1)
      DO 110 I=1,N
      H(I)=-R(I)+B1*H(I)
C      VETOR TRANSPOSTO DE H(K+1)
      U(I)=H(I)
110    CONTINUE
C      TESTE DE CONVERGENCIA
      DO 120 I=1,N
      IF(ABS(R(I))-EPS)120,120,60
120    CONTINUE
      WRITE(5,130) ITER
130    FORMAT(1H1,10X,'SOLUCAO DO SISTEMA COM CONVERGENCIA
      1 ESTABELECID APOS 'I5' ITERACOES')
      DO 150 I=1,N
      WRITE(5,140)I,X(I)
140    FORMAT(/,15X,'X('I3')=',F10.7)
150    CONTINUE
      STOP
      END
```

PROGRAMA 7

```

C      METODO ITERATIVO DOS GRADIENTES CONJUGADOS COM
C      ADEQUACAO DE ESCALA APLICANDO O ALGORITMO
C      COMPLETO
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION A(378),B(27),X(27),R(27),S(27),H(27)
      1,D(27),Y(27),XB(27),XA(378),U(27),C(27)
C      NUMERO DE EQUACOES E PRECISAO EXIGIDA
      N=27
      EPS=0.0000001
C      LEITURA DA MATRIZ DOS COEFICIENTES
      READ(2,10) (XA(I),I=1,378)
10     FORMAT(10G)
C      LEITURA DO VETOR DOS TERMOS INDEPENDENTES
      READ(2,20) (XB(I),I=1,27)
20     FORMAT(10G)
C      CALCULO DA NORMA EUCLIDIANA DO VETOR DOS TERMOS
C      INDEPENDENTES
      SIGMA=0.0
      DO 40 I=1,N
40     SIGMA=SIGMA+XB(I)**2
      XNORM=SQRT(SIGMA)
      T=1/XNORM
      DO 22 I=1,N
      CALL LOC(I,I,II,N,N,1)
      B(I)=XB(I)/SQRT(XA(II))
22     CONTINUE
C      ADEQUACAO DE ESCALA PARA O VETOR B
      DO 50 I=1,N
50     B(I)=T*B(I)
C      ADEQUACAO DE ESCALA PARA A MATRIZ DOS COEFICIENTES
      DO 30 I=1,N
      CALL LOC(I,I,II,N,N,1)
      DO 30 J=I+1,N
      CALL LOC(I,J,IJ,N,N,1)
      CALL LOC(J,J,JJ,N,N,1)
      A(IJ)=XA(IJ)/SQRT(XA(II)*XA(JJ))
30     CONTINUE
      DO 35 I=1,N
      CALL LOC(I,I,II,N,N,1)
35     A(II)=1
C      VALORES ARBITRARIOS INICIAIS
      DO 60 I4=1,N
60     Y(I4)=0
C      CALCULO DOS RESIDUOS INICIAIS R(0) E DO VETOR H(1)
      DO 80 I=1,N
      C(I)=0
      DO 70 J=1,N
      CALL LOC(I,J,IJ,N,N,1)
      C(I)=C(I)+A(IJ)*Y(J)
70     CONTINUE
      R(I)=B(I)+C(I)
      H(I)=-R(I)
C      APOS O COMANDO SEGUINTE S= TRANSPOSTA DE R
      S(I)=R(I)
C      APOS O COMANDO SEGUINTE U= TRANSPOSTA DE H
      U(I)=H(I)
80     CONTINUE

```

```

C      INICIO DO CICLO ITERATIVO
      ITER=0
90     ITER=ITER+1
      E1=0
      T1=0
      DO 110 I=1,N
      D(I)=0
      DO 100 J=1,N
      CALL LOC(I,J,IJ,N,N,1)
      D(I)=D(I)+A(IJ)*H(J)
100    CONTINUE
      T1=T1+S(I)*H(I)
      E1=E1+U(I)*D(I)
110    CONTINUE
C      NA DECLARACAO SEGUINTE E CALCULADO LAMBDA
      A1=-(T1/E1)
C      SOLUCAO DO SISTEMA A*Y=B*
      DO 120 I=1,N
      Y(I)=Y(I)+A1*H(I)
C      CALCULO DOS RESIDUOS R(I)
      R(I)=R(I)+A1*D(I)
      S(I)=R(I)
120    CONTINUE
      V1=0
      DO 130 I=1,N
      V1=V1+S(I)*D(I)
130    CONTINUE
C      CALCULO DO QUOCIENTE EPSILON(K)
      B1=V1/E1
C      CALCULO DE H(K+1)
      DO 140 I=1,N
      H(I)=-R(I)+B1*H(I)
C      VETOR TRANSPOSTO DE H(K+1)
      U(I)=H(I)
140    CONTINUE
C      TESTE DE CONVERGENCIA
      DO 150 I=1,N
      IF(ABS(R(I))-EPS)150,150,90
150    CONTINUE
      WRITE(5,160) ITER
160    FORMAT(1H1,10X,'SOLUCAO DO SISTEMA COM CONVERGENCIA
      1 ESTABELECID APOS '15' ITERACOES')
C      OBTENCAO DA SOLUCAO DO SISTEMA COM A FORMULA DE
C      RECORRENCIA  $X=D*Y/T$ 
      DO 170 I=1,N
      CALL LOC(I,I,II,N,N,1)
      X(I)=XNORM*Y(I)/SQRT(XA(II))
170    CONTINUE
      DO 190 I=1,N
      WRITE(5,180)I,X(I)
180    FORMAT(/,15X,'X('I3')=',F15.7)
190    CONTINUE
      STOP
      END

```

PROGRAMA 8

```

C      METODO ITERATIVO DOS GRADIENTES CONJUGADOS COM
C      A APLICACAO DO ALGORITMO SIMPLIFICADO
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION A(78),B(12),X(12),R(12),S(12),H(12)
      1,D(12),U(12),C(12)
C      NUMERO DE EQUACOES E PRECISAO EXIGIDA
      N=12
      EPS=0.0000001
C      LEITURA DA MATRIZ DOS COEFICIENTES
      READ(2,10) (A(I),I=1,78)
10     FORMAT(15G)
C      LEITURA DO VETOR DOS TERMOS INDEPENDENTES
      READ(2,20) (B(I),I=1,12)
20     FORMAT(12G)
C      VALORES ARBITRARIOS INICIAIS
      DO 60 I4=1,N
60     X(I4)=0
C      CALCULO DOS RESIDUOS INICIAIS R(0) E DO VETOR H(1)
      DO 80 I=1,N
      C(I)=0
      DO 70 J=1,N
      CALL LOC(I,J,IJ,N,N,1)
      C(I)=C(I)+A(IJ)*X(J)
70     CONTINUE
      R(I)=B(I)+C(I)
      H(I)=-R(I)
C      APOS O COMANDO SEGUINTE S= TRANSPOSTA DE R
      S(I)=R(I)
C      APOS O COMANDO SEGUINTE U= TRANSPOSTA DE H
      U(I)=H(I)
80     CONTINUE
C      INICIO DO CICLO ITERATIVO
      ITER=0
90     ITER=ITER+1
      E1=0
      T1=0
      DO 110 I=1,N
      D(I)=0
      DO 100 J=1,N
      CALL LOC(I,J,IJ,N,N,1)
      D(I)=D(I)+A(IJ)*H(J)
100    CONTINUE
      T1=T1+S(I)*R(I)
      E1=E1+U(I)*D(I)
110    CONTINUE
C      NA DECLARACAO SEGUINTE E CALCULADO LAMBDA
      A1=T1/E1
C      SOLUCAO DO SISTEMA
      DO 120 I=1,N
      X(I)=X(I)+A1*H(I)
C      CALCULO DOS RESIDUOS R(I)
      R(I)=R(I)+A1*D(I)
      S(I)=R(I)
120    CONTINUE
      V1=0
      DO 130 I=1,N
      V1=V1+S(I)*R(I)

```



```
130    CONTINUE
C      CALCULO DO QUOCIENTE EPSILON(K)
      B1=V1/T1
C      CALCULO DE H(K+1)
      DO 140 I=1,N
      H(I)=-R(I)+B1*H(I)
C      VETOR TRANSPONTO DE H(K+1)
      U(I)=H(I)
140    CONTINUE
C      TESTE DE CONVERGENCIA
      DO 150 I=1,N
      IF (ABS(R(I))-EPS)150,150,90
150    CONTINUE
      WRITE(5,160) ITER
160    FORMAT(1H1,10X,'SOLUCAO DO SISTEMA COM CONVERGENCIA
      1 ESTABELECID APOS 'I5' ITERACOES')
      DO 190 I=1,N
      WRITE(5,180)I,X(I)
180    FORMAT(/,15X,'X('I3')=',F15,7)
190    CONTINUE
      STOP
      END
```

PROGRAMA 9

```

C      METODO ITERATIVO DOS GRADIENTES CONJUGADOS COM
C      ADEQUACAO DE ESCALA APLICANDO O ALGORITMO
C      COMPLETO PARA RESOLVER OS SISTEMA DE EQUACOES
C      NORMAIS, PARTINDO PREVIAMENTE DAS EQUACOES DE
C      OBSERVACAO, COM O ESTABELECIMENTO EXPLICITO
C      DAS EQUACOES NORMAIS.
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION A(24,24),B(24),X(24),R(24),S(24)
      1,D(24),Y(24),XB(24),XA(24,24),AO(67,24),H(24)
      2,Q(67),XY(67),Z(67),U(24),C(24),AT(24,67)
      6,AH(67,24)
C      NUMERO DE EQUACOES, INCOGNITAS E PRECISAO EXIGIDA.
      M=67
      N=24
      EPS=0.0000001
C      LEITURA DAS EQUACOES DE OBSERVACAO
      READ(2,10)((AO(I,J),J=1,N),I=1,M)
10     FORMAT(24G)
C      LEITURA DO VETOR DOS TERMOS INDEPENDENTES
      READ(2,20) (XY(I),I=1,M)
20     FORMAT(10G)
C      LEITURA DA MATRIZ DOS PESOS Q (Q=MATRIZ DIAGONAL)
      READ(2,25)(Q(I),I=1,M)
25     FORMAT(30G)
C      NORMALIZACAO DA MATRIZ DOS COEFICIENTES
C      MATRIZ AT=TRANSPOSTA DE AO
      CALL GMTRA(AO,AT,M,N)
C      CALCULO DA MATRIZ NORMAL
      DO 26 I=1,M
      DO 26 J=1,N
      AH(I,J)=0
      AH(I,J)=AH(I,J)+Q(I)*AO(I,J)
26     CONTINUE
      CALL GMPRD(AT,AH,XA,N,M,N)
C      TERMOS INDEPENDENTES DO SISTEMA NORMALIZADO
      DO 27 I=1,M
      Z(I)=Q(I)*XY(I)
27     CONTINUE
      DO 28 I=1,N
      XB(I)=0
      DO 28 J=1,M
      XB(I)=XB(I)+AT(I,J)*Z(J)
28     CONTINUE
C      CALCULO DA NORMA EUCLIDIANA DO VETOR
C      DOS TERMOS INDEPENDENTES
      SIGMA=0.0
      DO 40 I=1,N
40     SIGMA=SIGMA+XB(I)**2
      XNORM=SQRT(SIGMA)
      T=1/XNORM
      DO 22 I=1,N
      B(I)=XB(I)/SQRT(XA(I,I))
22     CONTINUE
C      ADEQUACAO DE ESCALA PARA O VETOR B
      DO 50 I=1,N
50     B(I)=T*B(I)

```

```

C      ADEQUACAO DE ESCALA PARA A MATRIZ NORMAL
      DO 30 I=1,N
      DO 30 J=1,N
      A(I,J)=XA(I,J)/SQRT(XA(I,I)*XA(J,J))
30     CONTINUE
C      VALORES ARBITRARIOS INICIAIS
      DO 60 I4=1,N
60     Y(I4)=0
C      CALCULO DOS RESIDUOS INICIAIS R(0)
C      E DO VETOR H(1)
      DO 80 I=1,N
      C(I)=0
      DO 70 J=1,N
      C(I)=C(I)+A(I,J)*Y(J)
70     CONTINUE
      R(I)=B(I)+C(I)
      H(I)=-R(I)
      S(I)=R(I)
      U(I)=H(I)
80     CONTINUE
C      INICIO DO CICLO ITERATIVO
      ITER=0
90     ITER=ITER+1
      E1=0
      T1=0
      DO 110 I=1,N
      D(I)=0
      DO 100 J=1,N
      D(I)=D(I)+A(I,J)*H(J)
100    CONTINUE
      T1=T1+S(I)*H(I)
      E1=E1+U(I)*D(I)
110    CONTINUE
C      NA DECLARACAO SEGUINTE E CALCULADO LAMBDA
      A1=-(T1/E1)
C      SOLUCAO DO SISTEMA A*Y=B*
      DO 120 I=1,N
      Y(I)=Y(I)+A1*H(I)
C      CALCULO DOS RESIDUOS R(I)
      R(I)=R(I)+A1*D(I)
      S(I)=R(I)
120    CONTINUE
      V1=0
      DO 130 I=1,N
      V1=V1+S(I)*D(I)
130    CONTINUE
C      CALCULO DO QUOCIENTE EPSILON(K)
      B1=V1/E1
C      CALCULO DE H(K+1)
      DO 140 I=1,N
      H(I)=-R(I)+B1*H(I)
C      VETOR TRANSPOSTO DE H(K+1)
      U(I)=H(I)
140    CONTINUE
C      TESTE DE CONVERGENCIA
      DO 150 I=1,N
      IF(ABS(R(I))-EPS)150,150,90

```

```
150      CONTINUE
      WRITE(5,160) ITER
160      FORMAT(1H1,10X,'SOLUCAO DO SISTEMA COM CONVER
1 GENCIA ESTABELECIDIA APOS 'I5' ITERACOES')
C      OBTENCAO DA SOLUCAO DO SITEMA COM A FORMULA DE
C      RECORRENCIA  $X=D*Y/T$ 
      DO 170 I=1,N
      X(I)=XNORM*Y(I)/SQRT(XA(I,I))
170      CONTINUE
      DO 190 I=1,N
      WRITE(5,180)I,X(I)
180      FORMAT(/,15X,'X('I3')=',F16.9)
190      CONTINUE
      STOP
      END
```

```

C      METODO ITERATIVO DOS GRADIENTES CONJUGADOS PARA
C      RESOLVER AS EQUACOES NORMAIS A PARTIR DAS EQUA-
C      COES DE OBSERVACOES, SEM O ESTABELECIMENTO EXPLI-
C      DAS EQUACOES NORMAIS.
      DIMENSION D(67,24),Y(67),A(67,24),XL(67),B(24,67)
      1,F(67),XD(67),XF(67),Z(24),R(24),Q(67),T(24),
      2P(24),C(67),XV(67),X(24),XC(67),S(24),U(24),AH(67)
      3,V(67),G(67)
      READ(2,10)((D(I,J),J=1,24),I=1,67)
10     FORMAT(24G)
      READ(2,20)(Y(I),I=1,67)
20     FORMAT(10G)
      READ(2,30)(Q(I),I=1,67)
30     FORMAT(30G)
      M=67
      N=24
      MAX=700
      DO 40 I=1,M
      DO 40 J=1,N
      A(I,J)=0
      A(I,J)=A(I,J)+Q(I)*D(I,J)
40     CONTINUE
      DO 60 I=1,N
      X(I)=0
60     CONTINUE
      DO 70 I=1,N
      DO 70 J=1,M
      B(I,J)=0
      B(I,J)=B(I,J)+A(J,I)
70     CONTINUE
      DO 90 I=1,M
      C(I)=0
      DO 80 J=1,N
      C(I)=C(I)+D(I,J)*X(J)
80     CONTINUE
      V(I)=C(I)+Y(I)
90     CONTINUE
      DO 110 I=1,N
      R(I)=0
      DO 100 J=1,M
      R(I)=R(I)+B(I,J)*V(J)
100    CONTINUE
      F(I)=-R(I)
      T(I)=R(I)
110    CONTINUE
      ITER=0
120    ITER=ITER+1
      E1=0
      T1=0
      DO 140 I=1,M
      F(I)=0
      AH(I)=0
      DO 130 J=1,N
      F(I)=F(I)+A(I,J)*P(J)
      AH(I)=AH(I)+D(I,J)*F(J)
130    CONTINUE
      G(I)=F(I)
      E1=E1+G(I)*AH(I)

```

```

140      CONTINUE
      DO 150 I=1,N
      T1=T1+T(I)*F(I)
150      CONTINUE
      A1=-(T1/E1)
      DO 160 I=1,N
C      SOLUCAO DO SISTEMA
      X(I)=X(I)+A1*F(I)
160      CONTINUE
      DO 170 I=1,M
      XV(I)=V(I)+A1*AH(I)
170      CONTINUE
      DO 190 I=1,M
      XD(I)=0
      DO 180 J=1,N
      XD(I)=XD(I)+D(I,J)*X(J)
180      CONTINUE
      V(I)=XD(I)+Y(I)
190      CONTINUE
      DO 210 I=1,N
      R(I)=0
      DO 200 J=1,M
      R(I)=R(I)+B(I,J)*V(J)
200      CONTINUE
      T(I)=R(I)
210      CONTINUE
      U1=0
      DO 220 I=1,N
      U1=U1+T(I)*R(I)
220      CONTINUE
      V1=0
      DO 240 I=1,M
      XF(I)=0
      DO 230 J=1,N
      XF(I)=XF(I)+A(I,J)*R(J)
230      CONTINUE
      XC(I)=XF(I)
      V1=V1+XC(I)*AH(I)
240      CONTINUE
      B1=V1/E1
      DO 250 I=1,N
      F(I)=-R(I)+B1*F(I)
250      CONTINUE
C      TESTE DE CONVERGENCIA
      DO 270 I=1,N
      S(I)=0
      DO 260 J=1,M
      S(I)=S(I)+B(I,J)*V(J)
260      CONTINUE
270      CONTINUE
      DO 290 I=1,N
      U(I)=0
      DO 280 J=1,M
      U(I)=U(I)+B(I,J)*XV(J)
280      CONTINUE
290      CONTINUE
      RFE=0

```

```
      DO 300 I=1,N
      Z(I)=S(I)-U(I)
      RFE=RFE+Z(I)**2
300    CONTINUE
      IF(U1-3*RFE)320,320,310
310    IF(ITER-MAX)120,320,320
320    WRITE(5,330) ITER
330    FORMAT(10X,'NUMERO DE ITERACOES',I5)
      DO 350 I=1,N
      WRITE(5,340)I,X(I)
340    FORMAT(/,15X,'X('I3')= 'F16.9)
350    CONTINUE
      STOP
      END
```

```

C      METODO ITERATIVO DOS GRADIENTES CONJUGADOS PARA
C      RESOLVER AS EQUACOES NORMAIS A PARTIR DAS EQUA-
C      COES DE OBSERVACAO, SEM O ESTABELECIMENTO EXPLI-
C      CITO DAS EQUACOES NORMAIS.
      DIMENSION D(67,24),Y(67),A(67,24),XL(67),B(24,67)
      1,F(67),XD(67),XF(67),W(67),Z(24),R(24),Q(67),T(24),
      2P(24),C(67),XV(67),X(24),XC(67),AH(67),V(67),G(67)
      READ(2,1)((D(I,J),J=1,24),I=1,67)
1      FORMAT(24G)
      READ(2,2)(Y(I),I=1,67)
2      FORMAT(10G)
      READ(2,3)(Q(I),I=1,67)
3      FORMAT(30G)
      M=67
      N=24
      MAX=670
      EPS=0.0000001
      DO 5 I=1,M
      DO 5 J=1,N
      A(I,J)=0
      A(I,J)=A(I,J)+Q(I)*D(I,J)
5      CONTINUE
C      VALORES ARBITRARIOS INICIAIS
      DO 11 I=1,N
      X(I)=0
11     CONTINUE
C      CALCULO DA MATRIZ TRANSPOSTA DE A
      DO 15 I=1,N
      DO 15 J=1,M
      B(I,J)=0
      B(I,J)=B(I,J)+A(J,I)
15     CONTINUE
C      INICIO DO CICLO ITERATIVO
      DO 25 I=1,M
      C(I)=0
      DO 20 J=1,N
      C(I)=C(I)+D(I,J)*X(J)
20     CONTINUE
      V(I)=C(I)+Y(I)
25     CONTINUE
      DO 35 I=1,N
      R(I)=0
      DO 30 J=1,M
      R(I)=R(I)+B(I,J)*V(J)
30     CONTINUE
      P(I)=-R(I)
      T(I)=R(I)
35     CONTINUE
      ITER=0
40     ITER=ITER+1
      E1=0
      T1=0
      DO 50 I=1,M
      F(I)=0
      AH(I)=0
      DO 45 J=1,N
      F(I)=F(I)+A(I,J)*P(J)
      AH(I)=AH(I)+D(I,J)*P(J)

```



```

45      CONTINUE
      G(I)=F(I)
      E1=E1+G(I)*AH(I)
50      CONTINUE
      DO 51 I=1,N
      T1=T1+T(I)*F(I)
51      CONTINUE
      A1=-(T1/E1)
      BIG=0.0
      DO 55 I=1,N
C      SOLUCAO DO SISTEMA
      TEMP=X(I)+A1*F(I)
      DIF=ABS((X(I)-TEMP))
      IF(DIF-BIG)57,57,56
56      BIG=DIF
57      X(I)=TEMP
55      CONTINUE
C      TESTE DE CONVERGENCIA
      IF(BIG-EPS)140,59,59
59      IF(ITER-MAX)64,60,60
60      WRITE(5,61)
61      FORMAT(1H1,'VALOR DE BIG')
      WRITE(5,62) BIG
62      FORMAT(E20.7)
      GO TO 180
64      DO 75 I=1,M
      XD(I)=0
      DO 70 J=1,N
      XD(I)=XD(I)+D(I,J)*X(J)
70      CONTINUE
      V(I)=XD(I)+Y(I)
75      CONTINUE
      DO 85 I=1,N
      R(I)=0
      DO 80 J=1,M
      R(I)=R(I)+B(I,J)*V(J)
80      CONTINUE
      T(I)=R(I)
85      CONTINUE
      V1=0
      DO 95 I=1,M
      XF(I)=0
      DO 90 J=1,N
      XF(I)=XF(I)+A(I,J)*R(J)
90      CONTINUE
      XC(I)=XF(I)
      V1=V1+XC(I)*AH(I)
95      CONTINUE
      B1=V1/E1
      DO 100 I=1,N
      F(I)=-R(I)+B1*F(I)
100     CONTINUE
      GO TO 40
C      SOLUCAO FINAL DO SISTEMA APOS CONVERGENCIA
140     WRITE(5,155) ITER
155     FORMAT(1H1,'NUMERO DE ITERACOES',I5)
      DO 170 I=1,N
      WRITE(5,160)I,X(I),I,R(I)
160     FORMAT(5X,'X('I2')=',F16.7,5X,'R('I2')=',F16.7)
170     CONTINUE
180     STOP
      END

```

PROGRAMA 12

```

C      METODO ITERATIVO DOS GRADIENTES CONJUGADOS COM
C      ADEQUACAO DE ESCALA APLICANDO O ALGORITMO
C      COMPLETO PARA RESOLVER O SISTEMA DE EQUACOES
C      NORMAIS, A PARTIR DAS EQUACOES DE CONDICAO,
C      EXPLICITANDO A FORMACAO DAS EQUACOES NORMAIS.
C      NO PRESENTE PROGRAMA E CALCULADO TAMBEM O VETOR
C      DAS CORRECOES.
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION A(27,27),B(27),X(27),R(27),S(27),H(27)
      1, D(27),Y(27),XB(27),XA(27,27),XD(58,27),V(58)
      2,XE(27,58),Q(58),U(27),C(27),E(27,58)
C      NUMERO DE EQUACOES E PRECISAO EXIGIDA
      M=58
      N=27
      EPS=0.0000001
C      LEITURA DA MATRIZ TRANSPOSTA DA MATRIZ
C      DOS COEFICIENTES
      READ(2,10)((XD(I,J),J=1,N),I=1,M)
10     FORMAT(9G)
C      LEITURA DO VETOR DOS TERMOS INDEPENDENTES
      READ(2,20) (XB(I),I=1,N)
20     FORMAT(9G)
C      LEITURA DA MATRIZ INVERSA DOS PESOS
      READ(2,30) (Q(I),I=1,M)
30     FORMAT(30G)
C      NORMALIZACAO DA MATRIZ DOS COEFICIENTES
      CALL GMTRA(XD,XE,M,N)
      DO 40 I=1,N
      DO 40 J=1,M
      E(I,J)=0
      E(I,J)=E(I,J)+XE(I,J)*Q(J)
40     CONTINUE
      CALL GMPRD(E,XD,XA,N,M,N)
80     CONTINUE
C      CALCULO DA NORMA EUCLIDIANA DO VETOR DOS TERMOS
C      INDEPENDENTES=VETOR ERRO DE FECHAMENTO.
      SIGMA=0.0
      DO 90 I=1,N
90     SIGMA=SIGMA+XB(I)**2
      XNORM=SQRT(SIGMA)
      T=1/XNORM
      DO 100 I=1,N
      B(I)=XB(I)/SQRT(XA(I,I))
100    CONTINUE
C      ADEQUACAO DE ESCALA PARA O VETOR B
      DO 110 I=1,N
110    B(I)=T*B(I)
C      ADEQUACAO DE ESCALA PARA A MATRIZ DOS COEFICIENTES
      DO 120 I=1,N
      DO 120 J=1,N
      A(I,J)=XA(I,J)/SQRT(XA(I,I)*XA(J,J))
120    CONTINUE
C      VALORES ARBITRARIOS INICIAIS
      DO 130 I4=1,N
130    Y(I4)=0
C      CALCULO DOS RESIDUOS INICIAIS R(0) E DO VETOR H(1)
      DO 150 I=1,N

```

```

C(I)=0
DO 140 J=1,N
C(I)=C(I)+A(I,J)*Y(J)
140 CONTINUE
R(I)=B(I)+C(I)
H(I)=-R(I)
S(I)=R(I)
U(I)=H(I)
150 CONTINUE
C INICIO DO CICLO ITERATIVO
ITER=0
160 ITER=ITER+1
E1=0
T1=0
DO 180 I=1,N
D(I)=0
DO 170 J=1,N
D(I)=D(I)+A(I,J)*H(J)
170 CONTINUE
T1=T1+S(I)*H(I)
E1=E1+U(I)*D(I)
180 CONTINUE
A1=-(T1/E1)
C SOLUCAO DO SISTEMA A*Y=B*
DO 190 I=1,N
Y(I)=Y(I)+A1*H(I)
C CALCULO DOS RESIDUOS R(I)
R(I)=R(I)+A1*D(I)
S(I)=R(I)
190 CONTINUE
V1=0
DO 200 I=1,N
V1=V1+S(I)*D(I)
200 CONTINUE
C CALCULO DO QUOCIENTE EPSILON(K)
B1=V1/E1
DO 210 I=1,N
H(I)=-R(I)+B1*H(I)
C VETOR TRANSPOSTO DE H(K+1)
U(I)=H(I)
210 CONTINUE
C TESTE DE CONVERGENCIA
DO 220 I=1,N
IF(ABS(R(I))-EPS)220,220,160
220 CONTINUE
WRITE(5,230) ITER
230 FORMAT(1H1,10X,'SOLUCAO DO SISTEMA COM CONVERGENCIA
1 ESTABELECID APOS '15' ITERACOES')
C OBTENCAO DA SOLUCAO DO SITEMA COM A FORMULA DE
C RECORRENCIA X=D*Y/T
DO 240 I=1,N
X(I)=XNORM*Y(I)/SQRT(XA(I,I))
240 CONTINUE
DO 260 I=1,N
WRITE(5,250)I,X(I)
250 FORMAT(/,15X,'X('I3')=',F16.9)
260 CONTINUE

```

```
C      CALCULO DAS CORRECOES V(I)
      CALL GMFRD(XD,X,V,M,N,1)
      WRITE(5,270)
270    FORMAT(1H1,10X,'VETOR DAS CORRECOES')
      DO 290 I=1,M
      WRITE(5,280) I,V(I)
280    FORMAT(/,15X,'V('I3') =',F16.9)
290    CONTINUE
      STOP
      END
```

PROGRAMA 13

```

C      METODO ITERATIVO DOS GRADIENTES CONJUGADOS PARA
C      OBTEN A MATRIZ INVERSA DA MATRIZ SIMETRICA,
C      DEFINIDA POSITIVA
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION A(78),E(12),XN(12),R(12),P(12),S(12)
      1,T(12),XINV(12,12),U(12),D(12)
C      LEITURA DA MATRIZ NORMAL
      READ(2,10) (A(I),I=1,78)
10     FORMAT(15G)
C      LEITURA DA MATRIZ IDENTIDADE E
      READ(2,20) (E(I),I=1,12)
20     FORMAT(12G)
C      PRECISAO EXIGIDA E NUMERO DE EQUACOES
      EPS=0.0000001
      N=12
C      INICIO DO CONTADOR VETOR COLUNA
      L=0
30     L=L+1
      DO 40 I=1,N
        XN(I)=0
40     CONTINUE
      DO 80 I=1,N
        J=L
        IF(I-J)60,50,60
50     T(I)=E(I)
        GO TO 70
60     T(I)=0
70     R(I)=-T(I)
        P(I)=-R(I)
        S(I)=R(I)
        U(I)=P(I)
80     CONTINUE
C      INICIO DO CICLO ITERATIVO
      ITER=0
90     ITER=ITER+1
      E1=0
      T1=0
      DO 110 I=1,N
        D(I)=0
        DO 100 J=1,N
          CALL LOC(I,J,IJ,N,N,1)
          D(I)=D(I)+A(IJ)*P(J)
100    CONTINUE
        T1=T1+S(I)*P(I)
        E1=E1+U(I)*D(I)
110    CONTINUE
        A1=-T1/E1
        DO 120 I=1,N
          XN(I)=XN(I)+A1*P(I)
          R(I)=R(I)+A1*D(I)
          S(I)=R(I)
120    CONTINUE
        V1=0
        DO 130 I=1,N
          V1=V1+S(I)*D(I)
130    CONTINUE
        B1=V1/E1

```

```
      DO 140 I=1,N
      P(I)=-R(I)+B1*P(I)
      U(I)=P(I)
140    CONTINUE
      DO 150 I=1,N
      IF(ABS(R(I))-EPS)150,150,90
150    CONTINUE
      WRITE(5,160) ITER
160    FORMAT(' ',//,10X,'NUMERO DE ITERACOES = ',I5)
      WRITE(5,170) L
170    FORMAT(' ',10X,'VETOR COLUNA',I3)
      WRITE(5,180) (I,XN(I),I=1,N)
180    FORMAT(3(4X,'XN('I3') =',F10.7))
      DO 195 I=1,N
195    XINV(I,L)=XN(I)
      IF(L-N)30,200,200
200    WRITE(5,185)
185    FORMAT(1H1,20X'INVERSA DA MATRIZ NORMAL')
      DO 310 I=1,N
      WRITE(5,300) (XINV(I,L),L=1,I)
300    FORMAT(/,12(F7.3))
310    CONTINUE
      STOP
      END
```

NOTAS DE REFERÊNCIA

|1| DÉMIDOVITCH, B. & MARON, I. Elements de calcul numérique. Moscou, Éditions Mir, 1973, p. 239.

|2| BARSOTTI, Leo. Álgebra linear. Curitiba, A. M. Cavalcanti, 1976, p. 187.

|3| FADDEEV, D.K. & FADDEEVA, V.N. Computational methods of linear algebra. San Francisco, W.H. Freeman, 1963, p. 95.

|4| Ibid, p. 96.

|5| Ibid, p. 97.

|6| SANTOS, Vitoriano Ruas de B. Curso de cálculo numérico. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1976, p. 6-7.

|7| WESTLAKE, Joan R. A handbook of numerical matrix inversion and solution of linear equations. New York, John Wiley, 1968, p. 38.

|8| Ibid, p. 38.

|9| Ibid, p. 38.

|10| Ibid, p. 39.

|11| Ibid, p. 39.

|12| RALSTON, Antony. A first course in numerical analysis. Tokyo, McGraw-Hill, 1965, p. 431.

|13| ASHKENAZI, V. Solution and error analysis of large geodetic networks. Survey Review, 20(151):p.62.

|14| Ibid, p. 64.

|15| Ibid, p. 65.

|16| LUGNANI, João Bosco. O problema dos sistemas de equações lineares mal condicionadas e suas implicações em Geodésia. Curitiba. 1975. 160 f. Tese. Mestre em Ciências. Universidade Federal do Paraná. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas. p. 27.

|17| NAREND, K. Saxena. Improvement a geodetic triangulation through control points established by means of satellites or precision traversing. Conjugate Gradient Method (Cg-Method). Reports of the Department of Geodetic Science. The Ohio State University, (... 177): p. 18.

|18| RALSTON, Antony, p. 439.

|19| NAREND, K. Saxena. p. 22.

|20| Ibid, p. 22.

|21| Ibid, p. 24.

|22| Ibid, p. 26.

|23| Ibid, p. 27.

|24| Ibid, p. 29.

|25| FADDEEV, D.K. & FADDEEVA, V.N. p. 186.

|26| DÉMIDOVITCH, B. & MARON, I. Éléments de calcul numérique. Moscou, Édition Mir, 1973. p. 328.

|27| Ibid, p. 398.

|28| LUGNANI, João Bosco, p. 50-67.

|29| REYNOLDS, Walter I. Manual of triangulation computation and adjustment. Washington, U.S. Government Printing Office, 1934. p. 127.

|30| Ibid, p. 81.

|31| Ibid, p. 82.

|32| ROSIER, François A. Medidas diferentes da gravidade: Ajustamentos de uma sub-rede de estações

gravimétricas e determinação de coeficientes de escala para os gravímetros La Coste & ROMBERG Modelo G nº 41, 372 e 454. Curitiba. 1980. 190 f. Tese. Mestre em Ciências. Universidade Federal do Paraná. l. 118-121.

|33| Ibid, p. 130.

|34| REYNOLDS, Walter I. p. 81.

|35| FADDEEV, D.K. & FADDEEVA, V.N. p. 186.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALBRECHT, Peter. Análise numérica um curso moderno. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos. 1973. 240 p.
- ASHKENAZI, V. Solution and error analysis of large geodetic networks. Survey Review, 20 (151): 34-9, Jan., 1979.
- _____. Solution and error analysis of large geodetic networks. Survey Review, 20 (152): 34-9, Feb., 1969.
- BARBOSA, Ruy Madseu & GUIMARÃES, Afonso Celso. Métodos numéricos em sistemas lineares. São Paulo, Nobel, 1975. 190 p.
- BARSOTTI, Leo. Álgebra linear. Curitiba. A. M. Cavalcanti, 1976. 240 p.
- CONTE, S. D. Elementos de análise numérica. Porto Alegre, Globo, 1975. 331 p.
- DÉMIDOVITCH, B. & MARON, I. Éléments de calcul numérique. Moscou, Éditions Mir, 1973. 677 p.
- DÉMIDOVITCH, B. Problemas y ejercicios de analisis matemático. Moscou, Editorial Mir, 1977. 519 p.
- FADDEEV, D. K. & FADDEEVA, V.N. Computational methods of linear algebra. San Francisco, W. H. Freeman, 1963. 621 p.
- GEMAEL, Camil. Ajustamento: variação de coordenadas. Curitiba, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Universidade Federal do Paraná, 1974. 50 f.
- _____. Aplicação do cálculo matricial em geodésia 2a. parte: Ajustamento de observações. Curitiba, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Universidade Federal do Paraná, 1974. 85 f.
- LUGNANI, João Bosco. O problema dos sistemas de equações lineares mal condicionados e suas implicações em geodésia. Curitiba. 1975. Tese. Mestre em Ciências. Universidade Federal do Paraná, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas. 160 f.
- McGRACKEN, Daniel D. & DORN, William S. Métodos numéricos y programacion fortran. México, Editorial Limusa-Wiley, 1967. 476 p.

- NARENDA, K. Saxena. Improvement a geodetic triangulation through control points established by means of satellites or precision traversing. Conjugate Gradient Method (Cg-Method). Reports of the Department of Geodetic Science. The Ohio State University, (177): 17-34, Jun., 1972.
- PACITTI, Tércio. Fortran-monitor. Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico, 1970. 347 p.
- RALSTON, Antony. A first course in numerical analysis. Tokyo, McGraw-Hill, 1965. 577 p.
- REYNOLDS, Walter I. Manual of triangulation computation and adjustment. Washington, U.S. Government Printing Office, 1934. 242 p. (U.S. Coast and Geodetic Survey, special publication, 138).
- ROSIER, François A. Medidas diferentes da gravidade: Ajustamento de uma sub-rede de estações gravimétricas e determinação de coeficientes de escala para os gravímetros La Coste & ROMBERG Modelo G nº 41, 372 e 454. Curitiba. 1980. 190 f. Tese. Mestre em Ciências. Universidade Federal do Paraná. Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas.
- SANTOS, Vitoriano Ruas de B. Curso de cálculo numérico. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1976. 263 p.
- WESTLAKE, Joan R. A handbook of numerical matrix inversion and solution of linear equations. New York, John Wiley, 1968. 167 p.
- WILKINSON, J.H. The algebraic engenvalue problem. London, William Clowes, 1965. 662 p.